



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
**11<sup>η</sup> Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα**

Απρίλιος 2010

Χρόνος: 60 λεπτά

**Α', Β', Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

1. Το τελευταίο ψηφίο του αριθμού  $2137^{761}$  είναι:

- A. 1                      B. 3                      Γ. 5                      Δ. 7                      E. 9

2. Πόσοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 10 και του 100 αυξάνονται κατά 9 μονάδες, όταν αντιστραφούν τα ψηφία τους;

- A. 0                      B. 1                      Γ. 8                      Δ. 9                      E. 10

3. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι πάντοτε σωστή;

- |           |            |           |            |            |
|-----------|------------|-----------|------------|------------|
| A. Αν     | B. Αν      | Γ. Αν     | Δ. Αν      | E. Αν      |
| $x < 0,$  | $x^2 > x,$ | $x < 1,$  | $x^2 > 0,$ | $x^2 > x,$ |
| τότε      | τότε       | τότε      | τότε       | τότε       |
| $x^2 > x$ | $x > 0$    | $x^2 < x$ | $x < 0$    | $x < 0$    |

4. Αν  $3^a = 4$ ,  $4^b = 5$ ,  $5^c = 6$ ,  $6^d = 7$ ,  $7^e = 8$ ,  $8^z = 9$ ,  
τότε η τιμή του γινομένου  $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot z$  ισούται με:

- A. 0                      B. 1                      Γ. 2                      Δ. 3                      E. 4

5. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$  ορίζουμε την πράξη  $a * b = \frac{1+a}{1+b^2}$ .

Τότε η τιμή της παράστασης  $(2 * 0) * 1$  είναι

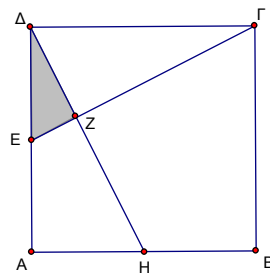
- A. 2                      B. 1                      Γ. 0                      Δ.  $\frac{1}{2}$                       E.  $\frac{5}{2}$

6. Αν  $g(x) = 1 - x^2$  και  $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$ , τότε το  $f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$  είναι ίσο με:

- A.  $\frac{3}{4}$                       B. 1                      Γ. 3                      Δ.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       E.  $\frac{7}{9}$

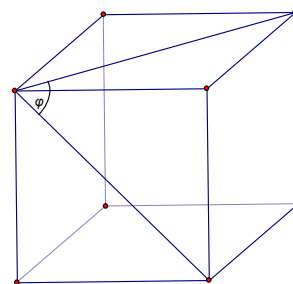
7. Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο και τα σημεία  $E, H$  είναι τα μέσα των  $A\Delta$  και  $AB$  όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta EZ$  είναι 1, τότε το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$  είναι:



- A. 14      B. 12      Γ. 16      Δ. 18      E. 20

8. Όταν ρώτησαν την Άννα τι γωνία σχηματίζουν οι διαγώνιες των εδρών του κύβου του σχήματος, απάντησε χωρίς να σκεφτεί  $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ . Η σωστή απάντηση διαφέρει από την απάντηση της Άννας κατά:



- A.  $10^\circ$       B.  $20^\circ$       Γ.  $30^\circ$       Δ.  $45^\circ$       E.  $60^\circ$

9. Το κλάσμα  $\frac{3}{x^2-9}$  είναι θετικό για κάθε τιμή του  $x$  που ανήκει στο σύνολο:

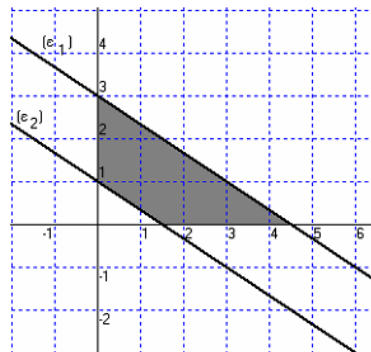
- A.  $(-\infty, -3]$       B.  $(-\infty, -3)$       Γ.  $(-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$       Δ.  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$       E.  $(-3, 3)$

10. Στο σχήμα δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): y = -\frac{2}{3}x + 3 \text{ και}$$

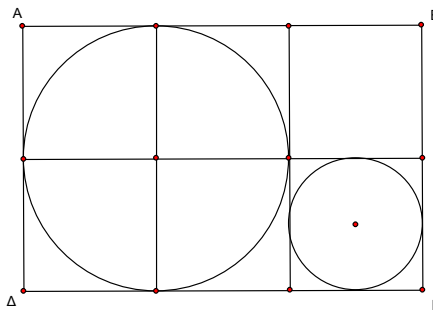
$$(\varepsilon_2): y = -\frac{2}{3}x + 1.$$

Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους είναι:



- A. 8      B.  $\frac{9}{2}$       Γ.  $\frac{31}{4}$       Δ. 6      E. Κανένα από τα προηγούμενα

11. Στο σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ αποτελείται από έξι τετράγωνα πλευράς 2. Η μικρότερη απόσταση μεταξύ των περιφερειών των δύο κύκλων είναι:



- A.  $\sqrt{10}$  B. 3 Γ.  $\sqrt{10} + 3$  Δ.  $\sqrt{10} - 2$  Ε.  $\sqrt{10} - 3$

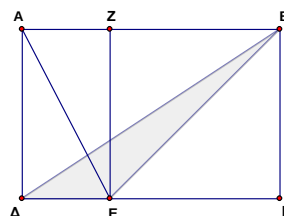
12. Ένα αυτοκίνητο διάνυσε μια ορισμένη διαδρομή με μέση ταχύτητα  $70 \text{ km/h}$ . Τα πρώτα  $10 \text{ km}$  της διαδρομής διάνυσε με ταχύτητα  $100 \text{ km/h}$ , τα επόμενα  $40 \text{ km}$  διάνυσε με ταχύτητα  $80 \text{ km/h}$  και το υπόλοιπο της διαδρομής διάνυσε με ταχύτητα  $50 \text{ km/h}$ . Η συνολική διαδρομή ήταν:

- A.  $70 \text{ km}$  B.  $60 \text{ km}$  Γ.  $80 \text{ km}$  Δ.  $100 \text{ km}$  Ε.  $90 \text{ km}$

13. Ο αριθμός 105 μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα θετικών διαδοχικών ακεραιών αριθμών με πόσους τρόπους;

- A. 2 B. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 7

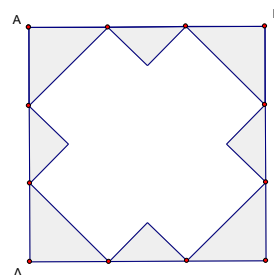
14. Ένας μικρός κήπος ΑΒΓΔ, σχήματος ορθογωνίου χωρίζεται σε ένα ορθογώνιο ΑΖΕΔ και ένα τετράγωνο ΖΒΓΕ, έτσι ώστε  $AE = 2\sqrt{5} \text{ m}$  και το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΕ να είναι  $4 \text{ m}^2$ .



Το εμβαδόν του κήπου είναι

- A.  $24 \text{ m}^2$  B.  $20 \text{ m}^2$  Γ.  $16 \text{ m}^2$  Δ.  $32 \text{ m}^2$  Ε.  $10\sqrt{5} \text{ m}^2$

15. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και στις πλευρές του έχουμε πάρει δώδεκα ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Ο λόγος του εμβαδού του λευκού σταυρού προς το εμβαδόν του τετραγώνου είναι



- A.  $\frac{1}{2}$  B.  $\frac{3}{4}$  Γ.  $\frac{4}{5}$  Δ.  $\frac{2}{3}$  Ε. 1

16. Το πλήθος των αρνητικών λύσεων της εξίσωσης  $x^4 - 6x^2 + 9 = 5x^3 + x$

ισούται με:

- A. 0      B. 1      Γ. 2      Δ. 3      Ε. 4

17. Το γινόμενο  $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2010^2}\right)$  ισούται με:

- A.  $\frac{2010}{2011}$       B.  $\frac{1}{2}$       Γ.  $\frac{2011}{2010}$       Δ.  $\frac{4020}{2011}$       Ε.  $\frac{2011}{4020}$

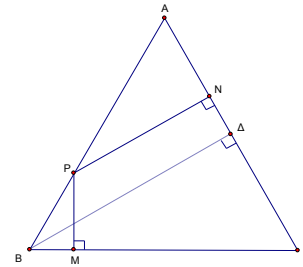
18. Σε ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$

πλευράς  $\alpha$ ,  $P$  είναι τυχαίο

σημείο της πλευράς  $AB$

και  $PN \perp A\Gamma$ ,  $PM \perp B\Gamma$ .

Η περίμετρος του τετραπλεύρου  $PM\Gamma N$  είναι:



- A.  $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$       B.  $\frac{3\alpha}{2}$       Γ.  $\frac{\alpha(\sqrt{3}+3)}{2}$       Δ.  $\frac{\alpha(\sqrt{3}+1)}{2}$

Ε. Κανένα από τα  
προηγούμενα

19. Έστω  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ακολουθία αριθμών με  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  και

$a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ , με  $n > 2$ . Ο  $a_{15}$  ισούται με:

- A.  $2^9$       B.  $2^{10}$       Γ.  $2^{11}$       Δ.  $2^{12}$       Ε.  $2^{13}$

20. Αν  $\alpha = 2^x$ ,  $\beta = 2^y$  και  $\alpha^y \beta^x = 2^{2(x+y)}$ , τότε  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  ισούται με:

- A. 2      B.  $\frac{1}{4}$       Γ.  $\frac{1}{2}$       Δ. 1      Ε.  $\sqrt{2}$

21. Αν για τη συνάρτηση  $y = f(x)$  ισχύει  $(f(x))^{25} = 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

τότε το  $(f(f(x)))^{625}$  ισούται με:

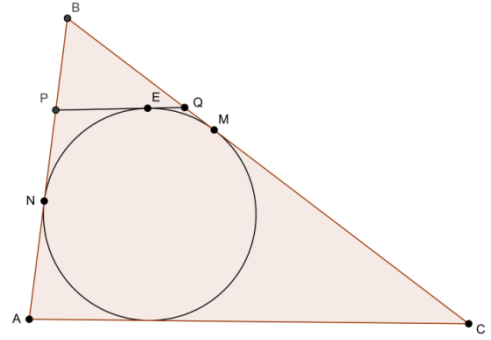
- A.  $2^{625} \cdot x$       B.  $2^{25} \cdot x$       Γ.  $2^{26} \cdot x$       Δ.  $625 \cdot x$       Ε.  $(2x)^{625}$

22. Εάν  $x$  αγελάδες μας δίνουν  $x + 1$  δοχεία γάλα σε  $x + 2$  μέρες, πόσες μέρες θα  
χρειαστούν  $x + 3$  αγελάδες για να πάρουμε  $x + 5$  δοχεία γάλα;

- A.  $\frac{x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)}$       B.  $\frac{(x+1)(x+3)(x+5)}{x(x+2)}$       Γ.  $\frac{x(x+1)(x+5)}{(x+2)(x+3)}$       Δ.  $\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+5)}$       Ε. Κανένα από τα  
προηγούμενα

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><b>23.</b> Οκτώ σημεία είναι τοποθετημένα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.</p> <p>Πόσα τρίγωνα μπορούμε να σχηματίσουμε έχοντας αυτά τα σημεία ως κορυφές;</p>                                                                                                                                                                                                                 |  |
| <p>A. 110      B. 60      Γ. 55      Δ. 56      Ε. 112</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
| <p><b>24.</b> Αν <math>\kappa^2 = -4</math>, τότε η τιμή της παράστασης: <math>(2 + \kappa)^8 - (2 - \kappa)^8</math> είναι:</p> <p>A. 0      B. 1      Γ. <math>2^{10}</math>      Δ. <math>-2^{10}</math>      Ε. Κανένα από τα προηγούμενα</p>                                                                                                                                  |  |
| <p><b>25.</b> Πόσες διατεταγμένες τριάδες <math>(x, y, z)</math> μη αρνητικών ακεραίων υπάρχουν, που ικανοποιούν την ισότητα <math>x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 9</math>.</p> <p>A. 4      B. 5      Γ. 6      Δ. 7      Ε. πάνω από 8</p>                                                                                                                                              |  |
| <p><b>26.</b> Αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των <math>\sqrt{n}</math>, <math>n \in \mathbb{N}</math> και <math>\sqrt{101}</math> είναι μικρότερη της μονάδας, τότε το πλήθος των φυσικών αριθμών <math>n</math> είναι</p> <p>A. 19      B. 21      Γ. 40      Δ. 41      Ε. 42</p>                                                                                                |  |
| <p><b>27.</b> Αν <math>\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = \kappa + \lambda\sqrt{2}</math>, τότε το <math>\kappa + \lambda</math> είναι ίσο με:</p> <p>A. 3      B. 5      Γ. 29      Δ. 25      Ε. Κανένα από τα προηγούμενα</p>                                                                                                                                                             |  |
| <p><b>28.</b> Ο Κώστας σχεδιάζει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χρωματίζοντας με κόκκινο τις δύο πλευρές μήκους 24 και με κίτρινο τις άλλες δύο πλευρές μήκους 36. Στη συνέχεια χρωματίζει κάθε εσωτερικό σημείο με το χρώμα της πλευράς που βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο. Το εμβαδόν του κόκκινου μέρους θα είναι:</p> <p>A. 144      B. 288      Γ. 364      Δ. 442      Ε. 524</p> |  |
| <p><b>29.</b> Πάνω σε ένα τραπέζι υπάρχουν 3 μπάλες, 3 κύβοι και 3 κώνοι.</p> <p>Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να επιλέξει ομάδα από αυτά τα αντικείμενα, έτσι ώστε η ομάδα να περιέχει τουλάχιστον μια μπάλα, τουλάχιστον ένα κύβο και τουλάχιστον ένα κώνο.</p> <p>A. 512      B. 343      Γ. 9      Δ. 27      Ε. Κανένα από τα προηγούμενα</p>                              |  |

- 30.** Έστω κύκλος  $(c)$  εγγεγραμμένος σε τρίγωνο  $ABC$ , όπως στο σχήμα. Μια ευθεία εφαπτομένη του κύκλου  $(c)$ , παράλληλη στην πλευρά  $AC$  του τριγώνου τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $BC$  του  $ABC$ , στα σημεία  $P$  και  $Q$ , αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο μεταβάλλεται έτσι ώστε η περιμέτρός του να ισούται με 1, η μέγιστη τιμή του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος  $PQ$  είναι



- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{5}$       Γ.  $\frac{1}{8}$       Δ.  $\frac{1}{10}$       Ε. Κανένα από τα προηγούμενα