ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 18/01/2020 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **<u>όλα</u>** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>Πρόβλημα 1</u> : (α) Αν n φυσικός αριθμός ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι ο n^2+2 είναι πολλαπλάσιο του 3.
(β) Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p έτσι ώστε ο p^2+8 να είναι επίσης πρώτος αριθμός.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>
(α) Αφού ο n δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, θα είναι $n=3k+1$ ή $n=3k+2$ με $k\in\mathbb{N}$.

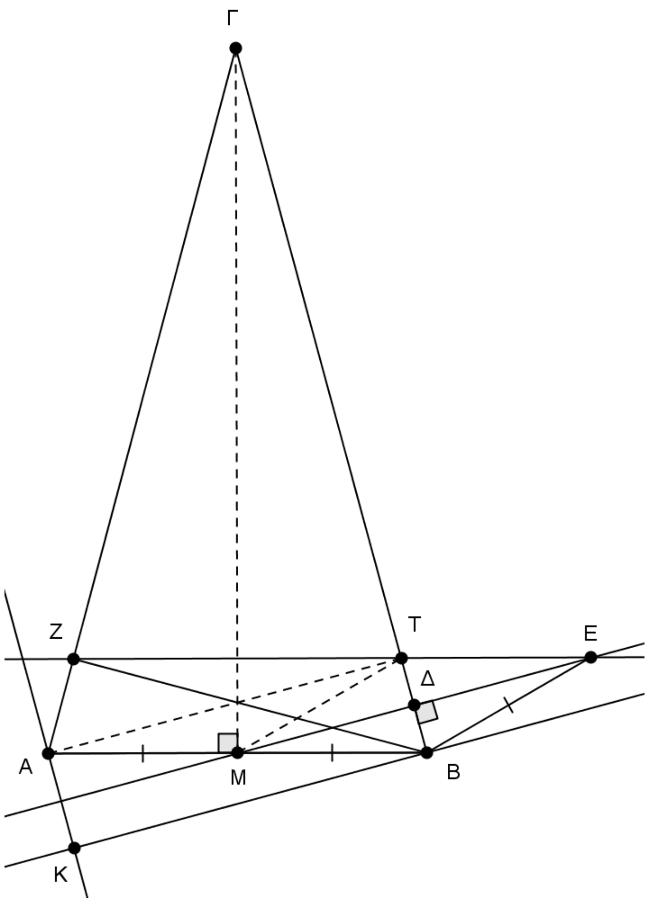
- Αν $n=3k+1$, τότε
  $n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1)$, πολλαπλάσιο του 3

- Αν $n=3k+2$, τότε
  $n^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+4k+2)$, πολλαπλάσιο του 3

(β) Αν $3\nmid p$, τότε από το (α) έχουμε $3/p^2+2 \Longrightarrow 3/p^2+8$. Τότε $p^2+8>3$, άρα ο p^2+8 δεν είναι πρώτος (όπως απαιτεί το πρόβλημα), άτοπο. Άρα $3\,/\,p$ και αφού ο p πρώτος, είναι $p=3$. Ελέγχουμε για $p=3$ ότι $p^2+8=17$, που είναι πρώτος.
Συνεπώς, μοναδική λύση $p=3$.

Πρόβλημα 2 : Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ $(A\Gamma = B\Gamma)$ με τις γωνίες της βάσης του να είναι $\angle \Gamma AB = \angle \Gamma BA = 75°$. Από το μέσον M του AB φέρουμε ευθεία κάθετη προς την $B\Gamma$ η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο $\varDelta$. Πάνω στην προέκταση της $M\varDelta$, προς το $\varDelta$, παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $M\varDelta = \varDelta E$. Η παράλληλη από το σημείο E προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z. Αν οι παράλληλες από τα σημεία B και A προς τις ευθείες $M\varDelta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο K, να υπολογίσετε την γωνία $\angle ZBK$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ



Έστω $T \equiv EZ \cap B\Gamma$
Λόγω συμμετρίας,
$AM = MB = BE$ και $\angle MB\Gamma = \angle \Gamma BE = 75^0$.
Αφού $ZT \parallel AB$, έχουμε
$\angle ETB = \angle TBM = 75^0$.
Άρα το τρίγωνο $\varDelta TEB$ είναι ισοσκελές, απ' όπου $TE = EB = MB = AM$. Τότε θα έχουμε $TE =\parallel AM \Longrightarrow TEMA$ παραλληλόγραμμο, συνεπώς $AT \parallel ME$ και αφού $ME \perp B\Gamma$, θα είναι $AT \perp B\Gamma$, δηλαδή $\angle ATB = 90^0$ και, λόγω συμμετρίας ως προς ΓM, έχουμε $\angle AZB = 90^0$.
Τότε
$\angle ZBA = 90^0 - \angle ZAB = 90^0 - 75^0 = 15^0$
Τέλος, $\angle ABK = \angle BME = 15^0$
και έτσι έχουμε:

$\angle ZBK = \angle ZBA + \angle ABK = 30^0$.

Πρόβλημα 3 : Ο Αντρέας και ο Βασίλης συμφωνούν να παίξουν ένα παιχνίδι με αριθμούς ως εξής: *«Γράφουν εναλλάξ στον πίνακα θετικά τέλεια τετράγωνα με τον όρο ότι ένα τέλειο τετράγωνο μπορεί να γραφεί αρκετές φορές.»*
Αν το άθροισμα των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα γίνει μεγαλύτερο του 24 αυτός που έγραψε τον τελευταίο αριθμό χάνει το παιχνίδι.
Αν ο Αντρέας ξεκινά πρώτος το παιχνίδι να βρείτε ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης και να εξηγήσετε την στρατηγική.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>

Κερδίζει ο Αντρέας με την εξής στρατηγική.
Γράφει αρχικά τον αριθμό $4 = 2^2$.
Ο Βασίλης έχει τις επιλογές να γράψει τους αριθμούς

$$1 = 1^2\,, \qquad 4 = 2^2, \qquad 9 = 3^2 \quad \text{ή} \quad 16 = 4^2$$

Και τώρα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- **i.** Αν ο Βασίλης γράψει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του $25 = 5^2$ θα χάσει.
- **ii.** Αν ο Βασίλης γράψει το $16 = 4^2$, τότε ο Ανδρέας γράφει το $4 = 2^2$. Έχουμε άθροισμα 24, άρα ότι και να γράψει μετά ο Βασίλης θα χάσει.
- **iii.** Αν ο Βασίλης γράψει το $4 = 2^2$, τότε ο Ανδρέας γράφει το $16 = 4^2$. Έχουμε άθροισμα 24, άρα ότι και να γράψει μετά ο Βασίλης θα χάσει.
- **iv.** Αν ο Βασίλης γράψει το $9 = 3^2$, τότε ο Ανδρέας γράφει το $1 = 1^2$. Έχουμε άθροισμα
  $$4 + 9 + 1 = 14$$
  Τώρα έχουμε τις εξής υποπεριπτώσεις:
  - **a.** Αν ο Βασίλης γράψει $1 = 1^2$ τότε ο Ανδρέας γράφει $9 = 3^2$. Έχουμε άθροισμα 24, άρα ότι και γράψει μετά ο Βασίλης θα χάσει.
  - **b.** Αν ο Βασίλης γράψει $9 = 3^2$ τότε ο Ανδρέας γράφει $1 = 1^2$. Έχουμε άθροισμα 24, άρα ότι και γράψει μετά ο Βασίλης θα χάσει.
  - **c.** Αν ο Βασίλης γράψει $4 = 2^2$, έχουμε άθροισμα $14 + 4 = 18$. Τότε ο Ανδρέας γράφει επίσης $4 = 2^2$. Το άθροισμα των αριθμών γίνεται $18 + 4 = 22$. Μετά ο Βασίλης υποχρεωτικά πρέπει να γράψει τον αριθμό $1 = 1^2$, γιατί όποιον άλλον γράψει θα χάσει. Τότε ο Ανδρέας γράφει τον αριθμό 1. Το άθροισμα γίνεται $1 = 22 + 1 + 1 = 24$. Άρα οποιανδήποτε άλλο αριθμό γράψει ο Βασίλης χάνει το παιχνίδι.
  - **d.** Αν ο Βασίλης γράψει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του $16 = 4^2$ τότε χάνει.
- **v.** Αν ο Βασίλης γράψει το $1 = 1^2$, τότε ο Ανδρέας θα γράψει το $9 = 3^2$. Θα έχουμε άθροισμα $4 + 1 + 9 = 14$ και ακολουθώντας την ίδια στρατηγική όπως προηγουμένως κερδίζει ο Ανδρέας.

Πρόβλημα 4 **:** Σε μια τάξη κάθε μαθητής παίζει τουλάχιστον ένα μουσικό όργανο από τα μουσικά όργανα κιθάρα, βιολί και πιάνο. Ξέρουμε ότι:

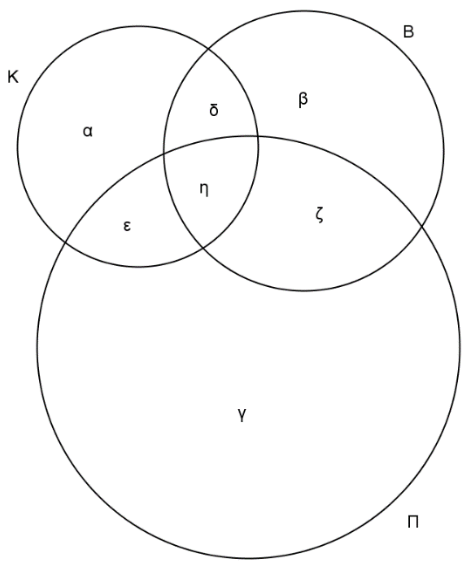
- Τουλάχιστον 90% των μαθητών παίζει κιθάρα ή βιολί ή και τα δύο.
- Τουλάχιστον 90% των μαθητών παίζει βιολί ή πιάνο ή και τα δύο.
- Τουλάχιστον 90% των μαθητών παίζει πιάνο ή κιθάρα ή και τα δύο.

Υπάρχει επίσης αριθμός k (όχι απαραίτητα ακέραιος αριθμός) ώστε

- Τουλάχιστον *k%* των μαθητών που παίζουν κιθάρα, παίζουν μόνο κιθάρα.
- Τουλάχιστον *k%* των μαθητών που παίζουν βιολί, παίζουν μόνο βιολί.
- Τουλάχιστον *k%* των μαθητών που παίζουν πιάνο, παίζουν μόνο πιάνο.

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του k.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ</u>



Συμβολίζουμε:

Κ: Το σύνολο των μαθητών που παίζουν κιθάρα
Β: Το σύνολο των μαθητών που παίζουν βιολί
Π: Το σύνολο των μαθητών που παίζουν πιάνο.

Παρατηρώντας το διπλανό διάγραμμα του Venn, συμβολίζουμε με $S = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta$ το πλήθος όλων των μαθητών και, λαμβάνοντας υπ' όψη τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

- Το πολύ 10% των μαθητών παίζει <u>μόνο</u> κιθάρα, δηλαδή $\alpha \leq \frac{S}{10}$ (1)
- Το πολύ 10% των μαθητών παίζει <u>μόνο</u> βιολί, δηλαδή $\beta \leq \frac{S}{10}$ (2)
- Το πολύ 10% των μαθητών παίζει <u>μόνο</u> πιάνο, δηλαδή $\gamma \leq \frac{S}{10}$ (3)

Επίσης

- Τουλάχιστον *k%* των μαθητών που παίζουν κιθάρα, παίζουν μόνο κιθάρα, δηλαδή
$$\alpha \geq \frac{k}{100}(\alpha + \delta + \eta + \varepsilon) : \ (4)$$
- Τουλάχιστον *k%* των μαθητών που παίζουν βιολί, παίζουν μόνο βιολί, δηλαδή
$$\beta \geq \frac{k}{100}(\beta + \delta + \eta + \zeta) : \ (5)$$
- Τουλάχιστον *k%* των μαθητών που παίζουν πιάνο, παίζουν μόνο πιάνο, δηλαδή
$$\gamma \geq \frac{k}{100}(\gamma + \varepsilon + \eta + \zeta) : \ (6)$$

Από (1)+(2)+(3) και στη συνέχεια λόγω των (4), (5), (6) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{3S}{10} \geq \alpha+\beta+\gamma \geq \frac{k}{100}&[\alpha+\beta+\gamma+2(\delta+\varepsilon+\zeta)+3\eta] \\ =\frac{k}{100}&[S+(\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)+\eta] \\ =\frac{k}{100}&[S+S-(\alpha+\beta+\gamma)+\eta] \\ =\frac{k}{100}&[2S-(\alpha+\beta+\gamma)+\eta] \\ \geq \frac{k}{100}&\left(2S-\frac{3S}{10}\right)=\frac{17kS}{1000}\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\frac{3S}{10} \geq \frac{17kS}{1000}$,απ' όπου $k \leq \frac{300}{17}$, δηλαδή $\boxed{k_{max}=\frac{300}{17} \cong 17{,}64}$

Αυτή η μέγιστη τιμή λαμβάνεται π.χ. για $\alpha=\beta=\gamma=3$, $\delta=\varepsilon=\zeta=7$ και $\eta=0$. Τότε $S=30$ και επίσης για κάθε όργανο έχουμε 17 μαθητές που παίζουν αυτό το όργανο και 3 μαθητές που παίζουν μόνο αυτό το όργανο.