



## ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

### Α΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ

#### «Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 18/01/2020

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

#### ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**Πρόβλημα 1 :** (α) Αν  $n$  φυσικός αριθμός ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι ο  $n^2 + 2$  είναι πολλαπλάσιο του 3.

(β) Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς  $p$  έτσι ώστε ο  $p^2 + 8$  να είναι επίσης πρώτος αριθμός.

**Πρόβλημα 2 :** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  ( $A\Gamma = B\Gamma$ ) με τις γωνίες της βάσης του να είναι  $\angle GAB = \angle GBA = 75^\circ$ . Από το μέσον  $M$  του  $AB$  φέρουμε ευθεία κάθετη προς την  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Πάνω στην προέκταση της  $M\Delta$ , προς το  $\Delta$ , παίρνουμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $M\Delta = ME$ . Η παράλληλη από το σημείο  $E$  προς την  $AB$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $Z$ . Αν οι παράλληλες από τα σημεία  $B$  και  $A$  προς τις ευθείες  $M\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο  $K$ , να υπολογίσετε την γωνία  $\angle ZBK$ .

**Πρόβλημα 3 :** Ο Αντρέας και ο Βασίλης συμφωνούν να παίξουν ένα παιχνίδι με αριθμούς ως εξής: «Γράφουν εναλλάξ στον πίνακα θετικά τέλεια τετράγωνα με τον όρο ότι ένα τέλειο τετράγωνο μπορεί να γραφεί αρκετές φορές.»

Αν το άθροισμα των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα γίνει μεγαλύτερο του 24 αυτός που έγραψε τον τελευταίο αριθμό χάνει το παιχνίδι.

Αν ο Αντρέας ξεκινά πρώτος το παιχνίδι να βρείτε ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης και να εξηγήσετε την στρατηγική.

**Πρόβλημα 4 :** Σε μια τάξη κάθε μαθητής παίζει τουλάχιστον ένα μουσικό όργανο από τα μουσικά όργανα κιθάρα, βιολί και πιάνο. Ξέρουμε ότι:

- Τουλάχιστον 90% των μαθητών παίζει κιθάρα ή βιολί ή και τα δύο.
- Τουλάχιστον 90% των μαθητών παίζει βιολί ή πιάνο ή και τα δύο.
- Τουλάχιστον 90% των μαθητών παίζει πιάνο ή κιθάρα ή και τα δύο.

Υπάρχει επίσης αριθμός  $k$  (όχι απαραίτητα ακέραιος αριθμός) ώστε

- Τουλάχιστον  $k\%$  των μαθητών που παίζουν κιθάρα, παίζουν μόνο κιθάρα.
- Τουλάχιστον  $k\%$  των μαθητών που παίζουν βιολί, παίζουν μόνο βιολί.
- Τουλάχιστον  $k\%$  των μαθητών που παίζουν πιάνο, παίζουν μόνο πιάνο.

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του  $k$ .