



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 15/02/2014

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1: Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x, y) \equiv 2y(x^2 - 1) + y(xy + 2) + 8x$$

$$K(x, y) \equiv y(xy + 2)$$

με x, y θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Να βρείτε (με απόδειξη) όλα τα ζευγάρια των θετικών ακεραίων (x, y) για τα οποία το $P(x, y)$ διαιρείται με το $K(x, y)$.

Πρόβλημα 2 : (α) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικοί θετικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma\delta = \kappa^4$, να αποδείξετε ότι

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)(1 + \delta) \geq (1 + \kappa)^4$$

(β) Αν x, y, z πραγματικοί θετικοί αριθμοί να βρείτε την μέγιστη τιμή της παράστασης

$$F(x, y, z) = \frac{xyz}{(1+x)(x+2y)(y+8z)(z+81)}$$

Πρόβλημα 3: Σε οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος AD και Δ_1, Δ_2 τα συμμετρικά του ίχνους D ως προς τις πλευρές $AB, A\Gamma$ του τριγώνου. Αν το $\Delta_1\Delta_2$ τέμνει τις πλευρές $AB, A\Gamma$ στα E, Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα GE, BZ είναι ύψη του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

Πρόβλημα 4: Την τελευταία Παρασκευή πριν τις διακοπές, σε κάποιο σχολείο, αποφασίστηκε να επισκεφτούν πολλοί μαθητές την σχολική βιβλιοθήκη. Κάθε ένας από τους μαθητές έφτανε στην βιβλιοθήκη και αναχωρούσε από αυτήν μόνο μια φορά. Ωστόσο, παρατηρήθηκε ότι, για κάθε τρεις από αυτούς, οι δύο από τους τρεις ήταν παρόντες στην βιβλιοθήκη την ίδια χρονική στιγμή (Δηλαδή, τα διαστήματα του χρόνου παραμονής τους στην βιβλιοθήκη επικαλύπτονται). Αποδείξτε ότι υπήρχαν δύο χρονικές στιγμές κατά την διάρκεια της μέρας τέτοιες ώστε κάθε μαθητής ήταν παρών στην βιβλιοθήκη για τουλάχιστον μια από αυτές.