ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 18/01/2020 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1: Αν $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $[x]$ ως τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που είναι μικρότερος ή ίσος με τον x. Για παράδειγμα: $[\pi] = 3$, και $[-1{,}5] = -2$.
Να βρείτε το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$$[x^2] + [x] = 2020$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Έστω $[x] = k \in \mathbb{Z}$. Τότε $k \le x < k+1$.

Αν $k \ge 0$ τότε $k^2 \le x^2 < (k+1)^2$, δηλαδή,

$$k^2 \le x^2 < k^2 + 2k + 1$$

Όμως επειδή $[x^2] \in \mathbb{Z}$ από την τελευταία ανισότητα θα έχουμε

$$k^2 \le [x^2] \le k^2 + 2k \text{ ή } k^2 + [x] \le [x^2] + [x] \le k^2 + 2k + [x] \text{ ή}$$

$$k^2 + k \le [x^2] + [x] \le k^2 + 3k$$

και από την δεδομένη εξίσωση

$$[x^2] + [x] = 2020$$

θα πάρουμε

$$k^2 + k \le 2020 \le k^2 + 3k$$

Αφού υποθέσαμε ότι $k \ge 0$ θα πρέπει $k = 44$, αφού

- Αν $k \ge 45$ τότε θα έχουμε $k^2 + k > k^2 \ge 45^2 = 2025 > 2020$. Άτοπο
- Αν $k \le 43$ τότε θα έχουμε $k^2 + 3k \le 43^2 + 3 \cdot 43 = 1849 + 129 < 2020$. Άτοπο

Επομένως,
Αν $[x] = k = 44$ τότε

$$[x^2] = 2020 - [x] = 2020 - 44 = 1976$$

και άρα

$$x \in \left[\sqrt{1976}, \sqrt{1977}\right)$$

(Ικανοποιεί αφού τότε $[x] = 44$.)

Αν $k < 0$, τότε η $k \le x < k+1$ δίνει

$$k^2 + 2k + 1 < x^2 \le k^2$$

Επομένως,

$$k^2+2k+1 \leq [x^2] \leq k^2$$
και
$$k^2+3k+1 \leq [x^2]+[x] \leq k^2+k \quad \text{ή} \quad k^2+3k+1 \leq 2020 \leq k^2+k$$
Πρέπει $k=-46$ αφού

- Αν $k \geq -45$ τότε θα έχουμε $k^2+k=(k+1)^2-k-1 \leq 1936+45-1<2020$. Άτοπο
- Αν $k \leq -47$ τότε θα έχουμε
$$k^2+3k+1 \geq (k+2)^2-k-3 \geq 2025+47-3>2020 \text{ . Άτοπο}$$

Αν $[x]=k=-46$ τότε
$$[x^2]=2020-[x]=2020+46=2066$$
και άρα
$$x \in \left[-\sqrt{2067}, -\sqrt{2066}\right)$$
(Ικανοποιεί αφού τότε $[x]=-46$.)

<u>Πρόβλημα 2</u> : : Να βρεθούν όλες οι τριάδες πρώτων αριθμών (p,q,r) έτσι ώστε:
$$p/2q+5, \quad q/2r+5, \quad r/2p+5$$
(με τον συμβολισμό $\alpha\ /\ b$ εννοούμε ότι ο αριθμός α είναι διαιρέτης του αριθμού b).

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>

Ο αριθμός $2q+5$ είναι περιττός, άρα και ο p είναι περιττός. Ομοίως οι αριθμοί q,r είναι περιττοί.
Αν $p=3$ τότε $r/11$ και άρα $r=11$. Τότε $q/27$ και άρα $q=3$. Άρα αν $p=3$ τότε θα έχουμε $p/11$. Άτοπο
Επομένως, $p \neq 3$ και ομοίως $q,r \neq 3$.
Αν $p=5$ τότε $r/15$. Αφού $r \neq 3$ τότε $r=5$. Ομοίως $q=5$.
Άρα μια λύση είναι $(p,q,r)=(5,5,5)$.

Έστω τώρα $p,q,r \geq 7$. Επειδή έχουμε κυκλική συμμετρία, χωρίς βλάβη της γενικότητας $p=\max\{p,q,r\}$. Τότε $p \geq q$ άρα
$$\frac{2q+5}{p} \leq \frac{2p+5}{p} < \frac{2p+p}{p} = 3$$
Τότε , $\frac{2q+5}{p}=2$ ή $\frac{2q+5}{p}=1$. Αν $\frac{2q+5}{p}=2 \Leftrightarrow 2(p-q)=5$. Άτοπο. Επομένως
$$\frac{2q+5}{p}=1 \Leftrightarrow p=2q+5.$$
Τότε
$$2p+5=4q+15$$
Άρα
$$q/2r+5 \ \ \text{και} \ \ r/4q+15$$
Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1η :</u> Αν $q \geq r$. Τότε όπως προηγουμένως θα έχουμε
$$\frac{2r+5}{q} \leq \frac{2q+5}{q} < \frac{2q+q}{q} = 3$$

Τότε , $\frac{2r+5}{q} = 2$ ή $\frac{2r+5}{q} = 1$. Αν $\frac{2r+5}{q} = 2 \Leftrightarrow 2(q-r) = 5$. Άτοπο. Επομένως

$$\frac{2r+5}{q} = 1 \Leftrightarrow q = 2r+5.$$

Τότε

$$4q + 15 = 4(2r+5) + 15 = 8r + 35$$

Επομένως

$$r/4q + 15 \text{ ή } r/8r + 35$$

Άρα, παίρνουμε ότι $r\ /\ 35$ και αφού $r \geq 7$ πρώτος αριθμός θα έχουμε $r = 7$. Τότε

$$q = 2r + 5 = 2 \cdot 7 + 5 = 19 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ p = 2q + 5 = 2 \cdot 19 + 5 = 43$$

<u>Περίπτωση 2η :</u> Αν $r \geq q$. Έχουμε

$$\frac{4q+15}{r} = \frac{4q}{r} + \frac{15}{r} \leq 4 + \frac{15}{7} < 7.$$

Τότε αφού ο αριθμός $\frac{4q+15}{r}$ είναι περιττός θα έχουμε τις επιλογές:

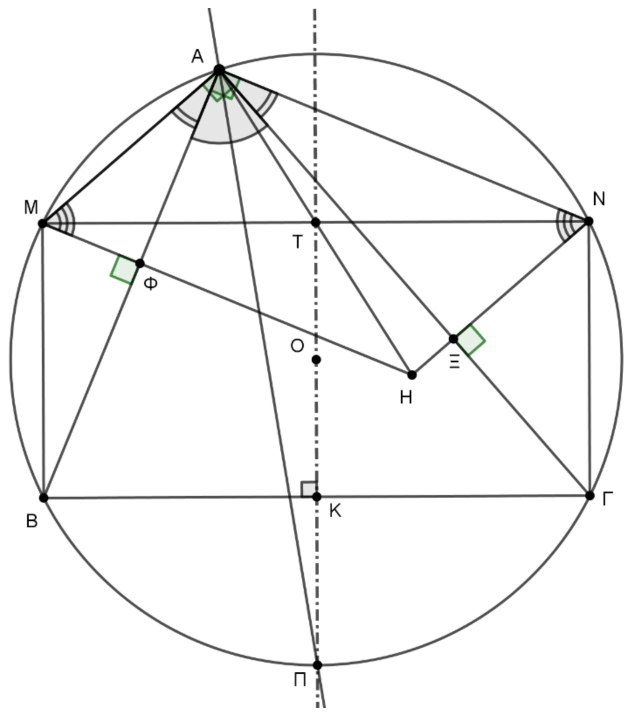
- $\frac{4q+15}{r} = 1 \Longrightarrow r = 4q + 15 > 2q + 15 = p$. Άτοπο αφού $p \geq r$
- $\frac{4q+15}{r} = 3 \Longrightarrow r = \frac{4q+15}{3}$. Τότε $3/4q + 15 \Longrightarrow 3/q \Longrightarrow q = 3$. Άτοπο.
- $\frac{4q+15}{r} = 5 \Longrightarrow r = \frac{4q+15}{5}$. Τότε $5/4q + 15 \Longrightarrow 5/q \Longrightarrow q = 5$. Άτοπο.

Άρα οι μόνες λύσεις είναι:

$(5,5,5), (43,19,7)$ *καθώς και οι* $(7,43,19)$ *και* $(19,7,43)$ (*από κυκλική συμμετρία*).

Πρόβλημα 3: Δίνεται τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ω. Η κάθετη στην $A\Gamma$ στο A τέμνει ξανά τον ω στο σημείο M και η κάθετη στην AB στο A τέμνει ξανά τον ω στο σημείο N. Οι κάθετες από τα σημεία M και N προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο H. Ονομάζουμε T το σημείο τομής των ευθειών AH και MN. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Gamma$ τέμνει το κύκλο στο σημείο Π, να αποδείξετε ότι η ευθεία $T\Pi$ διέρχεται από το μέσον του τμήματος $B\Gamma$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:



Έχουμε

$$\angle MAB = 90° - \angle BA\Gamma$$

και

$$\angle NA\Gamma = 90° - \angle BA\Gamma$$

Επομένως θα έχουμε

$$\angle MAB = \angle NA\Gamma \quad (A)$$

Άρα τα τόξα MB και $N\Gamma$ είναι ίσα από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $MN \parallel B\Gamma$.

Έστω Ξ, Φ τα σημεία τομής των καθέτων NH, MH με τις πλευρές $A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Τότε από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta A\Xi N, \Delta A\Phi M$ παίρνουμε

$$\angle ANH = 90° - \angle NA\Gamma$$
$$\angle AMH = 90° - \angle MAB$$

Άρα

$$\angle ANH = \angle AMH \qquad (1)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $A\Phi H\Xi$ έχουμε

$$\angle MHN = 180° - \angle BA\Gamma \qquad (2)$$

Επίσης από τα δεδομένα έχουμε

$$\angle BA\Gamma + \angle MAB = 90° \text{ ή } 2(\angle BA\Gamma) + 2(\angle MAB) = 180°$$

και λόγω της (A) η τελευταία ισότητα γράφεται

$$\angle BA\Gamma + \angle MAB + \angle NA\Gamma = 180° - \angle BA\Gamma \text{ ή } \angle MAN = 180° - \angle BA\Gamma \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) θα έχουμε

$$\angle MHN = \angle MAN$$

Επομένως το τετράπλευρο $AMHN$ είναι παραλληλόγραμμο και κατά συνέπεια το σημείο T είναι το μέσον της χορδής MN.

Διαφορετικά:

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο AMHN είναι παραλληλόγραμμο ως εξής: Έχουμε AM // HN αφού είναι και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΓ και ομοίως AN // MH είναι κάθετες στην AB.

Όμως η διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Gamma$ διέρχεται από το μέσον του τόξου $B\Gamma$. Άρα το σημείο Π είναι το μέσον του τόξου MN αφού τα τόξα MB και $N\Gamma$ είναι ίσα. Επομένως η ευθεία $T\Pi$ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι μεσοκάθετη στην χορδή MN.
Επομένως επειδή $MN \parallel B\Gamma$ έπεται ότι η ευθεία $T\Pi$ διέρχεται και από το μέσον K της χορδής $B\Gamma$.

Πρόβλημα 4: Ο Δημήτρης και ο Στέλιος συμφωνούν να παίξουν ένα παιχνίδι με αριθμούς ως εξής: *«Γράφουν εναλλάξ στον πίνακα θετικά τέλεια τετράγωνα με τον όρο ότι ένα τέλειο τετράγωνο μπορεί να γραφεί αρκετές φορές.»*
Αν το άθροισμα των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα γίνει μεγαλύτερο του 60 αυτός που έγραψε τον τελευταίο αριθμό χάνει το παιχνίδι.
Αν ο Δημήτρης ξεκινά πρώτος το παιχνίδι να βρείτε ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης και να εξηγήσετε την στρατηγική.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:
Κερδίζει ο Δημήτρης.
Ας συμβολίσουμε με G_n το παιχνίδι όπου οι αριθμοί που υπολείπεται να γραφτούν δεν πρέπει να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του n.
Επιλέγει πρώτος ο Δημήτρης το τέλειο τετράγωνο $4^2 = 16$.
Τότε ο Στέλιος έχει να επιλέξει ένα από τα τέλεια τετράγωνα

$$1, 4, 9, 16, 25, 36$$

Τότε

- Αν ο Στέλιος επιλέξει το 1 τότε ο Δημήτρης είναι σαν ξεκινά από το παιχνίδι G_{43} (γιατί $60 - 16 - 1 = 43$).
- Αν ο Στέλιος επιλέξει το 4 τότε ο Δημήτρης είναι σαν ξεκινά από το παιχνίδι G_{40} (γιατί $60 - 16 - 4 = 40$).
- Αν ο Στέλιος επιλέξει το 9 τότε ο Δημήτρης είναι σαν ξεκινά από το παιχνίδι G_{35} (γιατί $60 - 16 - 9 = 35$).
- Αν ο Στέλιος επιλέξει το 16 τότε ο Δημήτρης είναι σαν ξεκινά από το παιχνίδι G_{28} (γιατί $60 - 16 - 16 = 28$).
- Αν ο Στέλιος επιλέξει το 25 τότε ο Δημήτρης είναι σαν ξεκινά από το παιχνίδι G_{19} (γιατί $60 - 16 - 25 = 19$).
- Αν ο Στέλιος επιλέξει το 36 τότε ο Δημήτρης είναι σαν ξεκινά από το παιχνίδι G_8 (γιατί $60 - 16 - 36 = 8$).

Δηλαδή μετά που έγραψε ένα τέλειο τετράγωνο ο Στέλιος, τότε ο Δημήτρης είναι σαν να ξεκινά από ένα από τα $G_{43}, G_{40}, G_{35}, G_{28}, G_{19}, G_8$ και επιλέγει αντίστοιχα στην συνέχεια τα τέλεια τετράγωνα

$$36, 25, 25, 16, 9, 1$$

έτσι ώστε ο Στέλιος θα ξεκινά σε ένα από τα παιχνίδια

$$G_7 \ (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 43 - 36 = 7)$$
$$G_{15} \ (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 40 - 25 = 15)$$
$$G_{10} \ (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 35 - 25 = 10)$$
$$G_{12} \ (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 28 - 16 = 12)$$
$$G_{10} \ (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 19 - 9 = 10)$$
$$G_7 \ (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ 8 - 1 = 7)$$

Έχουμε για τον Στέλιο τις εξής επιλογές:

- ✓ Αν ξεκινά από το G_7 τότε μπορεί να επιλέξει 1 ή 4 και το παιχνίδι μεταφέρεται αντίστοιχα στα G_6 $(7-1=6)$ ή G_3 $(7-4=3)$.
- ✓ Αν ξεκινά από το G_{10} τότε μπορεί να επιλέξει 1 ή 4 ή 9 και το παιχνίδι μεταφέρεται αντίστοιχα στα G_9 ή G_6 ή G_1 .
- ✓ Αν ξεκινά από το G_{12} τότε μπορεί να επιλέξει 1 ή 4 ή 9 και το παιχνίδι μεταφέρεται αντίστοιχα στα G_{11} ή G_8 ή G_3 .
- ✓ Αν ξεκινά από το G_{15} τότε μπορεί να επιλέξει 1 ή 4 ή 9 και το παιχνίδι μεταφέρεται αντίστοιχα στα G_{14} ή G_{11} ή G_6 .

Δηλαδή ο Δημήτρης θα ξεκινά το παιχνίδι μετά από τα

$$G_1 , G_3 , G_6 , G_8 , G_9 , G_{11} , G_{14}$$

Άρα

- Στα παιχνίδια G_1 , G_9 ο Δημήτρης επιλέγει αντίστοιχα 1 ή 9 και κερδίζει.
- Στα παιχνίδια G_3 , G_6 , G_8 , G_{11} , G_{14} επιλέγει αντίστοιχα τα τετράγωνα 1, 4,1,9,9, οπότε το παιχνίδι μεταφέρεται στα G_2 , G_2 , G_7 , G_2 , G_5 .

Επομένως

- Στο G_2 ο Στέλιος επιλέγει το 1 και μετά ο Δημήτρης επιλέγει το 1 και κερδίζει.
- Στο G_5 ο Στέλιος επιλέγει το 1 ή 4 και μετά ο Δημήτρης επιλέγει το 4 ή 1 και κερδίζει.
- Στο G_7 ο Στέλιος επιλέγει το 1 ή 4 και μετά ο Δημήτρης επιλέγει το 4 ή 1 και το παιχνίδι μεταφέρεται στο G_2 και είναι η σειρά του Στέλιου να παίξει. Θα επιλέξει το 1 και μετά ο Δημήτρης επιλέγει το 1 και κερδίζει.

Σημείωση: Μπορούμε να ανακαλύψουμε τη συγκεκριμένη στρατηγική ξεκινώντας από το τέλος. Ο παίκτης που ξεκινά στο G_1 κερδίζει, αυτός που ξεκινά στο G_2 χάνει κ.ο.κ. Για να αποφασίσουμε αν αυτός που ξεκινά στο G_n κερδίζει η χάνει κοιτάζουμε τα παιγνίδια G_{n-1} , G_{n-4} , G_{n-9} , ... Αν σε οποιοδήποτε από αυτό κερδίζει ο δεύτερος παίκτης, τότε στο G_n κερδίζει ο πρώτος παίκτης. Σε διαφορετική περίπτωση στο G_n κερδίζει ο δεύτερος παίκτης. Εργαζόμενοι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε ότι για $n \leq 44$ ο δεύτερος παίκτης κερδίζει στο G_n αν και μόνο αν

$$n \in \{0,2,5,7,10,12,15,17,20,22,34,39,44\}$$

Μπορούμε να σταματήσουμε εδώ διότι ο Δημήτρης στην πρώτη του κίνηση μπορεί να αναγκάσει τον Στέλιο να ξεκινά ως πρώτος παίκτης από το G_{44}.