



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 21/01/2017

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1: Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.
Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^{10} + \beta^{10}$ είναι θετικός ακέραιος και να υπολογίσετε το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του.

Πρόβλημα 2 : Δυο κυβικές δεξαμενές γεμάτες νερό έχουν ακμές τους ακέραιους αριθμούς κ, λ που είναι τέτοιοι ώστε $\kappa^2 + \lambda^2 = p$, όπου το p είναι πρώτος αριθμός.
Αν από κάθε δεξαμενή αφαιρέσουμε 2 κυβικές μονάδες νερού, η αριθμητική τιμή του όγκου του νερού που απομένει και στις δυο δεξαμενές διαιρείται με τον p . Να βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (κ, λ) .

Πρόβλημα 3: Δίνεται το σύνολο $\Sigma = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ πέντε πραγματικών αριθμών. Σχηματίζουμε όλα τα υποσύνολα $\Sigma_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ του Σ με τρία στοιχεία. Αν η διαφορά του αθροίσματος των στοιχείων κάθε υποσυνόλου Σ_i πλην το άθροισμα των στοιχείων του Σ που δεν ανήκουν στο υποσύνολο Σ_i είναι θετικός αριθμός,
α) να βρείτε την τιμή του k και
β) να αποδείξετε ότι το γινόμενο όλων των δυνατών διαφορών που σχηματίζονται είναι μικρότερο ή ίσον από το γινόμενο των τετραγώνων των πέντε στοιχείων του συνόλου Σ .

Πρόβλημα 4:

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AD, BE, \Gamma Z$ τα ύψη του (τα σημεία Δ, E, Z είναι τα ίχνη των υψών πάνω στις πλευρές $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα) και H το σημείο τομής των υψών του τριγώνου. Φέρουμε την ευθεία (ε) που διέρχεται από τα σημεία Z και Δ . Πάνω στην (ε) παίρνουμε σημεία K και Λ τέτοια ώστε το ύψος ΓZ να διέρχεται από το μέσον του τμήματος KE και το ύψος AD να διέρχεται από το μέσον του τμήματος ΛE . Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών KE, AD και N το σημείο τομής των ευθειών $\Lambda E, \Gamma Z$ να αποδείξετε ότι:

- i. $\angle NMA = \angle EBF$
- ii. Τα σημεία N, Λ, H, K, M είναι ομοκυκλικά
- iii. Το δεύτερο σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $\triangle N\Lambda H, \triangle E\Gamma H$ είναι το σημείο K .