ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 12/01/2019 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: **:** Να βρεθούν όλες οι τριάδες πρώτων αριθμών (p, q, r) ώστε

$$p^2 + q^2 = r^2 + 417$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι πρέπει $p, q \geq 3$.

Αν $p, q \neq 3$ τότε ξέρουμε ότι κάθε πρώτος μεγαλύτερος του 3 θα είναι της μορφής

$$p = 3k + 1 \text{ ή } p = 3k + 2,\ k \in \mathbb{N} \text{ και επομένως } p^2 \equiv 1 mod 3$$

Τότε θα έχουμε

$$r^2 = p^2 + q^2 - 417 \equiv 1 + 1 - 0 \equiv 2 mod 3,$$

που είναι άτοπο.

Έστω $q = 3$. Τότε η εξίσωση γράφεται

$$p^2 - r^2 = 408 \Leftrightarrow (p - r)(p + r) = 408 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17.$$

Οι αριθμοί $p - r$ και $p + r$ αφού έχουνε άρτιο άθροισμα και γινόμενο είναι και οι δύο άρτιοι.

Επίσης αφού $p + r > p - r$, θα έχουμε τις εξής δυνατές περιπτώσεις

- $\begin{cases} p + r = 204 \\ p - r = 2 \end{cases}$ και παίρνουμε $p = 103, r = 101$
- $\begin{cases} p + r = 102 \\ p - r = 4 \end{cases}$ και παίρνουμε $p = 53, r = 49 = 7 \cdot 7$, απορρίπτεται αφού το r δεν είναι πρώτος.
- $\begin{cases} p + r = 68 \\ p - r = 6 \end{cases}$ και παίρνουμε $p = 37, r = 31$
- $\begin{cases} p + r = 34 \\ p - r = 12 \end{cases}$ και παίρνουμε $p = 23, r = 11$

Επομένως θα έχουμε τις τριάδες

$$(p, q, r) = (103,3,101), (37,3,31), (23,3,11)$$

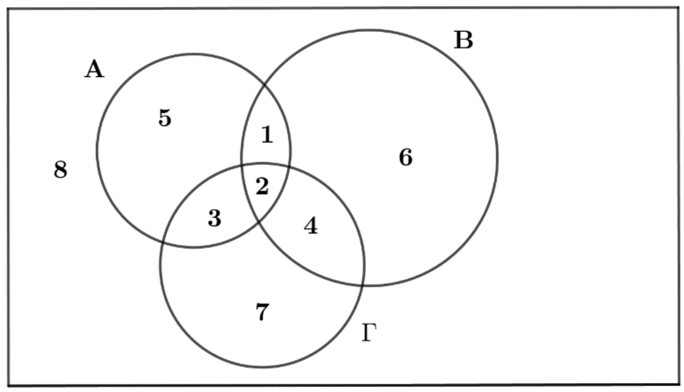
Ομοίως για $p = 3$, θα έχουμε τις τριάδες

$$(p, q, r) = (3,103,101), (3,37,31), (3,23,11)$$

<u>Πρόβλημα 2</u> : Να βρείτε το πλήθος των τριάδων (A, B, Γ) για τις οποίες ισχύουν όλες οι πιο κάτω συνθήκες:

- Τα A, B, Γ είναι υποσύνολα του συνόλου $\{1,2,3,\ldots,2019\}$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap \Gamma \neq \emptyset$ και $B \cap \Gamma \neq \emptyset$

<u>Λύση:</u>



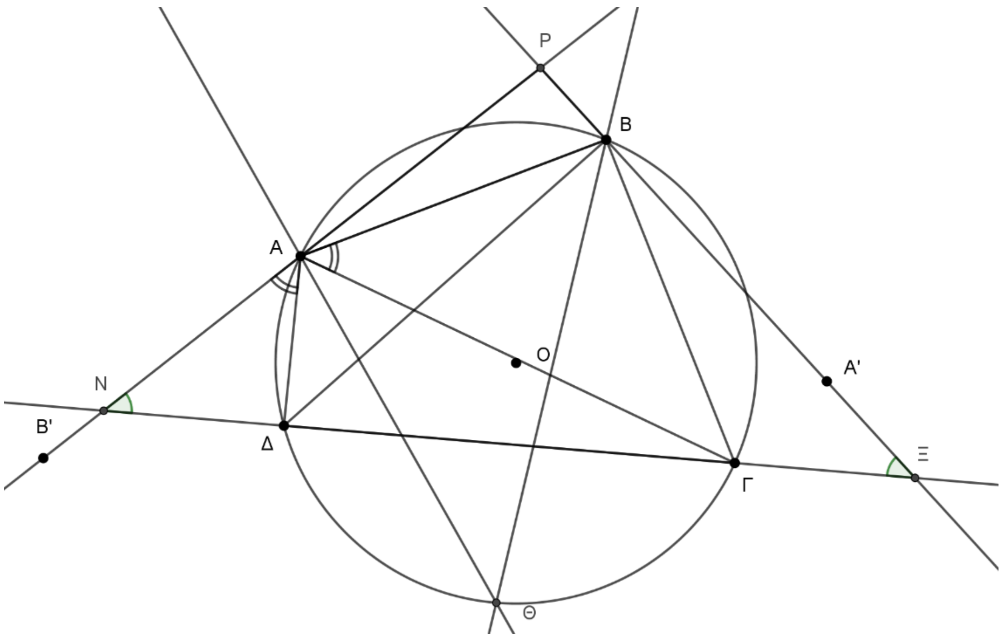
Κατασκευάζουμε το διάγραμμα του Venn.
Στις περιοχές 1 και 2 δεν πρέπει να υπάρχει κανένα στοιχείο. Οι περιοχές 3 και 4 πρέπει να περιέχουν από τουλάχιστο ένα στοιχείο.
Για $A \cap B = \emptyset$ υπάρχουν 6^{2019} τριάδες, αφού έχουμε 6 επιλογές (6 περιοχές) για κάθε στοιχείο.
Από αυτές τις τριάδες στις 5^{2019} έχουμε και $A \cap \Gamma = \emptyset$ ενώ σε 5^{2019} έχουμε $B \cap \Gamma = \emptyset$.
Όμως(από αυτές) σε 4^{2019} έχουμε $A \cap \Gamma = \emptyset$ και $B \cap \Gamma = \emptyset$. Επομένως από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού σε

$$6^{2019} - 2 \cdot 5^{2019} + 4^{2019}$$

έχουμε $A \cap B = \emptyset,\ A \cap \Gamma \neq \emptyset,\ B \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Πρόβλημα 3: : Έστω $ΑΒΓΔ$ εγγεγραμμένο τετράπλευρο σε κύκλο με κέντρο O. Ονομάζουμε $Θ$ το σημείο τομής των διχοτόμων (δ_1), (δ_2) των γωνιών $\angle ΓΑΔ$, $\angle ΓΒΔ$ αντίστοιχα. Θεωρούμε A', B' τα συμμετρικά των A, B ως προς τις $(\delta_2), (\delta_1)$ αντίστοιχα. Έστω P το σημείο τομής των ευθειών AB' και BA'. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Θ, O, P$ είναι συνευθειακά.

Λύση:



Επειδή το σημείο $Θ$ βρίσκεται στο μέσον του τόξου $ΔΓ$ του περιγεγραμμένου κύκλου στο $ΑΒΓΔ$, θα έχουμε $OΘ \perp ΓΔ$.
Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $PO \perp ΓΔ$. Έστω N και $Ξ$ τα σημεία τομής των PB' και PA' με την ευθεία $ΓΔ$ αντίστοιχα. Τότε

$$\angle ΑΝΔ = \angle ΑΔΓ - \angle ΝΑΔ \qquad (1)$$

Όμως λόγω συμμετρίας έχουμε $\angle ΝΑΔ = \angle ΒΑΓ$. Επίσης από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ παίρνουμε

$$\angle ΒΑΓ = \angle ΒΔΓ$$

Άρα, η (1) γίνεται

$$\angle ΑΝΔ = \angle ΑΔΓ - \angle ΒΔΓ = \angle ΑΔΒ \qquad (2)$$

Επίσης θα έχουμε

$$\angle ΑΔΒ = \angle ΑΓΒ = \angle ΒΓΔ - \angle ΑΓΔ = \angle ΒΓΔ - \angle ΑΒΔ$$

Λόγω συμμετρίας παίρνουμε

$$\angle ΑΒΔ = \angle ΓΒΞ$$

Επομένως η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$\angle ΑΔΒ = \angle ΒΓΔ - \angle ΓΒΞ = \angle ΒΞΓ \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε

$$\angle ΑΝΔ = \angle ΒΞΓ$$

Άρα το τρίγωνο $\triangle PNΞ$ είναι ισοσκελές.
Επειδή $\angle ΝΑΔ = \angle ΒΑΓ$ και $\angle ΝΔΑ = \angle ΑΒΓ$ θα έχουμε

$$\triangle ΝΔΑ \approx \triangle ΓΒΑ \Rightarrow \frac{ΝΔ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΒΑ} \Rightarrow ΝΔ = \frac{ΔΑ \cdot ΓΒ}{ΒΑ}$$

Ομοίως,

$$\Delta B\Gamma\Xi \approx \Delta BA\Delta \Longrightarrow \frac{B\Gamma}{BA} = \frac{\Gamma\Xi}{A\Delta} \Longrightarrow \Gamma\Xi = \frac{\Delta A \cdot \Gamma B}{BA}$$

Επομένως θα έχουμε $N\Delta = \Gamma\Xi$. Δηλαδή οι ευθείες PA' και PB' είναι συμμετρικές ως προς την μεσοκάθετη του $\Gamma\Delta$. Άρα $PO \perp \Gamma\Delta$ και επειδή $O\Theta \perp \Gamma\Delta$ συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Θ, O, P είναι συνευθειακά.

<u>Πρόβλημα 4</u>: Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0,1]$ ώστε

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x_1}{3-x_1} + \frac{x_2}{3-x_2} + \frac{x_3}{3-x_3} + \frac{x_4}{3-x_4} + (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) \leq 1$$

<u>Λύση:</u>

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να δεχθούμε ότι

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 1$$

Τότε θα έχουμε

$$x_1 \leq x_4 \Leftrightarrow -x_1 \geq -x_4 \Leftrightarrow 3 - x_1 \geq 3 - x_4 \Leftrightarrow \frac{x_1}{3-x_1} \leq \frac{x_1}{3-x_4}$$

Όμοια θα πάρουμε

$$\frac{x_2}{3-x_2} \le \frac{x_2}{3-x_4} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{x_3}{3-x_3} \le \frac{x_3}{3-x_4}$$

Επομένως η προς ανισότητα απόδειξη γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{3-x_1}+\frac{x_2}{3-x_2}+\frac{x_3}{3-x_3}+\frac{x_4}{3-x_4}+(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)\\ \le \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{3-x_4}+(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)\\ = \frac{2}{3-x_4}+(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) \le 1\end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) \le 1-\frac{2}{3-x_4} \Leftrightarrow (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) \le \frac{1-x_4}{3-x_4}$$

και αφού $1-x_4>0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(3-x_4) \le 1$$

Όμως, έχουμε

$$\begin{aligned}3-x_4 = 1+2-x_4 = 1+x_1+x_2+x_3+x_4-x_4 = 1+x_1+x_2+x_3\\ \le (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\end{aligned}$$

Επομένως η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$\begin{aligned}(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(3-x_4) \le (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \le 1\\ \Leftrightarrow (1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2) \le 1\end{aligned}$$

που ισχύει αφού $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0,1]$.