



# ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

## Α' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ «Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 12/01/2019

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

### ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**Πρόβλημα 1:** Να βρεθούν όλες οι τριάδες πρώτων αριθμών  $(p, q, r)$  ώστε

$$p^2 + q^2 = r^2 + 417$$

**Πρόβλημα 2:** Να βρείτε το πλήθος των τριάδων  $(A, B, \Gamma)$  για τις οποίες ισχύουν όλες οι πιο κάτω συνθήκες:

- Τα  $A, B, \Gamma$  είναι υποσύνολα του συνόλου  $\{1, 2, 3, \dots, 2019\}$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap \Gamma \neq \emptyset$  και  $B \cap \Gamma \neq \emptyset$

**Πρόβλημα 3:** Έστω  $AB\Gamma\Delta$  εγγεγραμμένο τετράπλευρο σε κύκλο με κέντρο  $O$ . Ονομάζουμε  $\theta$  το σημείο τομής των διχοτόμων  $(\delta_1), (\delta_2)$  των γωνιών  $\angle\Gamma A \Delta, \angle\Gamma B \Delta$  αντίστοιχα. Θεωρούμε  $A', B'$  τα συμμετρικά των  $A, B$  ως προς τις  $(\delta_2), (\delta_1)$  αντίστοιχα. Έστω  $P$  το σημείο τομής των ευθειών  $AB'$  και  $BA'$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\theta, O, P$  είναι συνευθειακά.

**Πρόβλημα 4:** Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0, 1]$  ώστε

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x_1}{3-x_1} + \frac{x_2}{3-x_2} + \frac{x_3}{3-x_3} + \frac{x_4}{3-x_4} + (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) \leq 1$$