**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

**Α΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ** ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

# «Ευκλείδης»

**Ημερομηνία: 12/01/2019** **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

---

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

---

## ***ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ***

***Πρόβλημα 1 :*** (α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^4+4$ σε γινόμενο δύο μη σταθερών πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.
(β) Να βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων $(\alpha,\beta)$ για τους οποίους η παράσταση

$$\alpha^4+4\beta^4$$

είναι πρώτος αριθμός.

***Προτεινόμενη λύση***
(α) Το πολυώνυμο $x^4+4=(x^2)^2+2^2$
γράφεται

$$x^4+4=x^4+4-4x^2+4x^2=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

(β) Αν θέσουμε αντί $x^2$ το $\alpha^2$ και στην θέση του 2 βάλουμε $2\beta^2$ τότε θα έχουμε

$$(\alpha^2)^2+(2\beta^2)^2=\alpha^4+4\beta^4=(\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta).$$

Επομένως θα έχουμε

$$\alpha^4+4\beta^4=[(\alpha+\beta)^2+\beta^2][(\alpha-\beta)^2+\beta^2]$$

Αφού για τον παράγοντα $(\alpha+\beta)^2+\beta^2$ έχουμε

$$(\alpha+\beta)^2+\beta^2>1$$

για να είναι πρώτος ο αριθμός

$$\alpha^4+4\beta^4$$

θα πρέπει $(\alpha-\beta)^2+\beta^2=1$ και αφού $\alpha,\beta$ θετικοί ακέραιοι η μόνη δυνατή περίπτωση για να ισχύει είναι

$$(\alpha,\beta)=(1,1)$$

***<u>Πρόβλημα 2</u> :*** Να βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών $(\alpha,\beta,\gamma)$ για τις οποίες ισχύουν όλες οι πιο κάτω συνθήκες:
(i) $\alpha\beta\gamma = 1$
(ii) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha + \beta + \gamma$
(iii) $\beta - \alpha = 1$

***<u>Προτεινόμενη λύση</u>***
Από την (iii) έχουμε $\beta = \alpha + 1$ . Επομένως η (i) μας δίνει

$$\gamma = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$$

Άρα, η (ii) μας δίνει

$$\alpha + (\alpha+1) + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} = \alpha(\alpha+1) + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} = \alpha(\alpha+1) + \frac{2\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)} \Longrightarrow$$

$$\frac{2\alpha}{\alpha(\alpha+1)} = 2\alpha + 1 - \alpha^2 - \alpha = \alpha + 1 - \alpha^2 \Longrightarrow 2 = (\alpha + 1 - \alpha^2)(\alpha+1) \Longrightarrow$$

$$\alpha^3 - 2\alpha + 1 = 0$$

Παραγοντοποιώντας την τελευταία εξίσωση έχουμε

$$\alpha^3 - 2\alpha + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 1) = 0$$

Επομένως θα έχουμε

$$\alpha = 1 \ \text{ή} \ \ \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ \ \text{ή} \ \ \alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Παίρνουμε

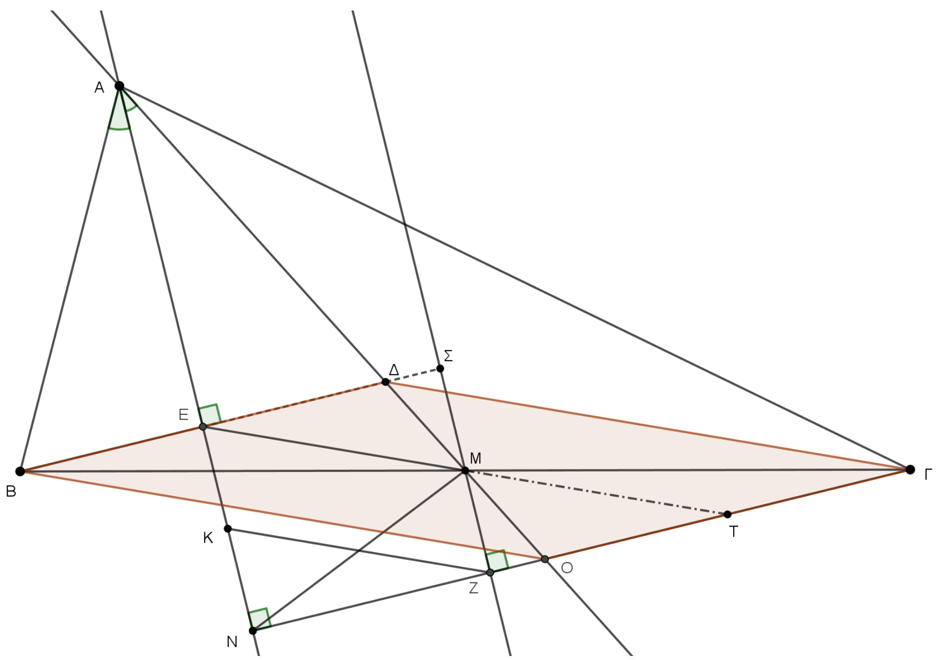
- Αν $\alpha = 1$ τότε $\beta = 2,\ \gamma = \frac{1}{2}$
- Αν $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ τότε $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Άρα $\alpha\beta = 1$ και επομένως $\gamma = 1$.
- Αν $\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ τότε $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Άρα $\alpha\beta = 1$ και επομένως $\gamma = 1$.

Όλες οι τριάδες $(\alpha,\beta,\gamma)$ που ικανοποιούν και τις τρείς συνθήκες είναι

$$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(1,2,\frac{1}{2}\right) \ \text{ή} \ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \ \text{ή} \ \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$$

***Πρόβλημα 3 :*** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Έστω $M$ το μέσον της πλευράς του $ΒΓ$ και έστω ότι $AB < AM$. Πάνω στην ευθεία $AM$ παίρνουμε σημείο $\Delta$ τέτοιο ώστε $AB = A\Delta$. Ονομάζουμε $E$ το σημείο τομής της διχοτόμου $(\delta)$ της γωνίας $\angle BA\Delta$ με την ευθεία $B\Delta$. Η κάθετη από το σημείο $\Gamma$ προς την $(\delta)$ τέμνει την διάμεσο $AM$ στο σημείο $O$ και την $(\delta)$ στο σημείο $N$. Θεωρούμε $K, T$ τα μέσα των τμημάτων $EN$ και $O\Gamma$ αντίστοιχα. Αν η παράλληλη από το $M$ προς την $(\delta)$ τέμνει την ευθεία $\Gamma N$ στο σημείο $Z$ να αποδείξετε ότι $KZ = MT$.

***Προτεινόμενη λύση***




Αφού το τρίγωνο $\triangle AB\Delta$ είναι ισοσκελές και η $AE$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Delta$ θα έχουμε $AE \perp B\Delta$.

Έστω $\Sigma$ το σημείο τομής της $E\Delta$ με την ευθεία $MZ$. Τότε

$$\triangle \Delta\Sigma M = \triangle MZO$$

Επομένως, $\Delta M = MO$ και αφού από την υπόθεση $BM = M\Gamma$ θα έχουμε ότι το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma O$ είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού τα σημεία $E, T$ είναι μέσα των τμημάτων $B\Delta, \Gamma O$ αντίστοιχα τότε συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $E, M, T$ είναι συνευθειακά.

Επειδή το τρίγωνο $\triangle ENT$ είναι ορθογώνιο και $ME = MT$ τότε $MN = ME = MT$.

Άρα, στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle EMN$ το $K$ είναι το μέσο του $EN$. Επομένως $MK \perp EN$.

Τότε το τετράπλευρο $MKNZ$ είναι ορθογώνιο. Άρα

$$KZ = MN = ME = MT.$$

***Πρόβλημα 4 :*** Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι εξής αριθμοί:

2018 άσσοι, 2019 δυάρια και 2020 τριάρια

Σε κάθε κίνηση ένας παίκτης μπορεί να σβήσει δύο διαφορετικούς αριθμούς και να γράψει στην θέση τους τον τρίτο αριθμό (Ο παίκτης σβήνει δύο αριθμούς και γράφει μόνο ένα αριθμό.) Το παιχνίδι τελειώνει όταν ο παίκτης δεν μπορεί να κάνει άλλη τέτοια κίνηση.

Κάθε ένας από τους Αντρέα, Βασίλη και Γιώργο παίζει το παιγνίδι μόνος του ξεχωριστά μέχρι να τελειώσει. Στο τέλος του δικού του παιγνιδιού ο Αντρέας θέλει να αφήσει στον πίνακα γραμμένο μόνο ένα άσσο (και κανένα άλλο αριθμό) ο Βασίλης μόνο ένα δυάρι (και κανένα άλλο αριθμό) και ο Γιώργος μόνο ένα τριάρι (και κανένα άλλο αριθμό). Να εξηγήσετε πλήρως ποιοι από τους τρείς μπορούν να πετύχουν τον στόχο τους.

***Προτεινόμενη λύση***

Παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα το άθροισμα των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα είναι άρτιο. Επομένως ο Αντρέας και ο Γιώργος δεν μπορούν να πετύχουν τον στόχο τους. Ο μόνος που μπορεί να πετύχει τον στόχο του είναι ο Βασίλης ως εξής:

$$\begin{gathered}
\beta\acute{\eta}\mu\alpha\ 1o\colon [2018(\acute{\alpha}\sigma\sigma o\iota), 2019(\delta\upsilon\acute{\alpha}\rho\iota\alpha), 2020(\tau\rho\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha)] \\
\beta\acute{\eta}\mu\alpha\ 2o\colon [2019(\acute{\alpha}\sigma\sigma o\iota), 2018(\delta\upsilon\acute{\alpha}\rho\iota\alpha), 2019(\tau\rho\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha)] \\
\beta\acute{\eta}\mu\alpha\ 3o\colon [2018(\acute{\alpha}\sigma\sigma o\iota), 2019(\delta\upsilon\acute{\alpha}\rho\iota\alpha), 2018(\tau\rho\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha)] \\
\beta\acute{\eta}\mu\alpha\ 4o\colon [2017(\acute{\alpha}\sigma\sigma o\iota), 2018(\delta\upsilon\acute{\alpha}\rho\iota\alpha), 2019(\tau\rho\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha)] \\
\vdots \\
[0(\acute{\alpha}\sigma\sigma o\iota), 1(\delta\upsilon\acute{\alpha}\rho\iota\alpha), 2(\tau\rho\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha)] \\
[1(\acute{\alpha}\sigma\sigma o\iota), 0(\delta\upsilon\acute{\alpha}\rho\iota\alpha), 1(\tau\rho\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha)] \\
[0(\acute{\alpha}\sigma\sigma o\iota), 1(\delta\upsilon\acute{\alpha}\rho\iota\alpha), 0(\tau\rho\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha)]
\end{gathered}$$

Από το $1^o$ βήμα έως το $4^o$ βήμα έχουμε:

$$(n+1, n+2, n+3) \longrightarrow (n, n+1, n+2) \longrightarrow \cdots$$