



## ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

### Α΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ

#### «Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 12/01/2019

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

#### ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**Πρόβλημα 1 :** (α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο  $x^4 + 4$  σε γινόμενο δύο μη σταθερών πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

(β) Να βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων  $(\alpha, \beta)$  για τους οποίους η παράσταση

$$\alpha^4 + 4\beta^4$$

είναι πρώτος αριθμός.

**Πρόβλημα 2 :** Να βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών  $(\alpha, \beta, \gamma)$  για τις οποίες ισχύουν όλες οι πιο κάτω συνθήκες:

- (i)  $\alpha\beta\gamma = 1$
- (ii)  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha + \beta + \gamma$
- (iii)  $\beta - \alpha = 1$

**Πρόβλημα 3 :** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Έστω  $M$  το μέσον της πλευράς του  $B\Gamma$  και έστω ότι  $AB < AM$ . Πάνω στην ευθεία  $AM$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $AB = A\Delta$ . Ονομάζουμε  $E$  το σημείο τομής της διχοτόμου  $(\delta)$  της γωνίας  $\angle B\Delta\Gamma$  με την ευθεία  $B\Delta$ . Η κάθετη από το σημείο  $\Gamma$  προς την  $(\delta)$  τέμνει την διάμεσο  $AM$  στο σημείο  $O$  και την  $(\delta)$  στο σημείο  $N$ . Θεωρούμε  $K, T$  τα μέσα των τμημάτων  $EN$  και  $OG$  αντίστοιχα. Αν η παράλληλη από το  $M$  προς την  $(\delta)$  τέμνει την ευθεία  $\Gamma N$  στο σημείο  $Z$  να αποδείξετε ότι  $KZ = MT$ .

**Πρόβλημα 4 :** Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι εξής αριθμοί:

2018 άσσοι, 2019 δυάρια και 2020 τριάρια

Σε κάθε κίνηση ένας παίκτης μπορεί να σβήσει δύο διαφορετικούς αριθμούς και να γράψει στην θέση τους τον τρίτο αριθμό (Ο παίκτης σβήνει δύο αριθμούς και γράφει μόνο ένα αριθμό.) Το παιχνίδι τελειώνει όταν ο παίκτης δεν μπορεί να κάνει άλλη τέτοια κίνηση.

Κάθε ένας από τους Αντρέα, Βασίλη και Γιώργο παίζει το παιχνίδι μόνος του ξεχωριστά μέχρι να τελειώσει. Στο τέλος του δικού του παιχνιδιού ο Αντρέας θέλει να αφήσει στον πίνακα γραμμένο μόνο ένα άσσο (και κανένα άλλο αριθμό) ο Βασίλης μόνο ένα δυάρι (και κανένα άλλο αριθμό) και ο Γιώργος μόνο ένα τριάρι (και κανένα άλλο αριθμό). Να εξηγήσετε πλήρως ποιοι από τους τρεις μπορούν να πετύχουν τον στόχο τους.