



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 28/02/2021

Ώρα Εξέτασης: 09:30 - 12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Η Ελένη γέννησε το πρώτο της παιδί όταν ήταν 25 χρονών. Μετά από δύο χρόνια γέννησε το δεύτερό της παιδί και μετά από ακόμη τρία χρόνια γέννησε το τρίτο της παιδί. Να βρείτε την ηλικία της Ελένης όταν αυτή ήταν ίση με το άθροισμα των ηλικιών των τριών παιδιών της.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω x η ηλικία της Ελένης όταν αυτή ήταν ίση με το άθροισμα των ηλικιών των τριών παιδιών της. Τότε οι ηλικίες των τριών παιδιών της ήταν $x - 25$, $x - 27$ και $x - 30$ αντίστοιχα. Τότε

$$x = (x - 25) + (x - 27) + (x - 30) = 3x - 82 \Rightarrow 2x = 82 \Rightarrow x = 41$$

Άρα η Ελένη ήταν 41 ετών όταν η ηλικία της ήταν ίση με το άθροισμα των ηλικιών των τριών παιδιών της.

Πρόβλημα 2

Γράφουμε τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4, . . . με την παρακάτω διάταξη:

1							
2	3	4					
5	6	7	8	9			
10	11	12	13	14	15	16	

Αν συνεχίσουμε να γράφουμε τους αριθμούς με το ίδιο μοτίβο τότε να βρείτε:

(α) Ποιος αριθμός είναι ο τελευταίος της 20^{ης} σειράς.

(β) Ποιος αριθμός είναι ο πρώτος της 100^{ης} σειράς.

(γ) Σε ποια σειρά και σε ποια στήλη θα βρίσκεται ο αριθμός 2020.

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε το εξής μοτίβο:

- Ο τελευταίος αριθμός της 2^{ης} σειράς είναι $2^2 = 4$.
- Ο τελευταίος αριθμός της 3^{ης} σειράς είναι $3^2 = 9$.
- Ο τελευταίος αριθμός της 4^{ης} σειράς είναι $4^2 = 16$.

Επομένως:

(α) Ο τελευταίος αριθμός της 20^{ης} σειράς είναι $20^2 = 400$.

(β) Ο τελευταίος αριθμός της 99^{ης} σειράς είναι $99^2 = 9801$. Άρα ο πρώτος αριθμός της 100^{ης} σειράς είναι $9801 + 1 = 9802$.

(γ) Επειδή $44^2 = 1936 < 2020 < 2025 = 45^2$ ο 2020 βρίσκεται στην 45^η σειρά. Ο πρώτος αριθμός αυτής της σειράς είναι ο $1936 + 1 = 1937$. Επειδή $2020 - 1936 = 84$, ο 2020 βρίσκεται στην 84^η στήλη.

Πρόβλημα 3

Ένας μαθητής θέλει να τοποθετήσει τους αριθμούς 2001, 2002, 2003, . . . , 2010 δίπλα-δίπλα χωρίς κόμμα, με οποιαδήποτε σειρά, ώστε να σχηματίσει έναν 40-ψήφιο αριθμό ο οποίος να είναι πρώτος. Να εξετάσετε αν μπορεί ο μαθητής να το επιτύχει αυτό.

Προτεινόμενη Λύση

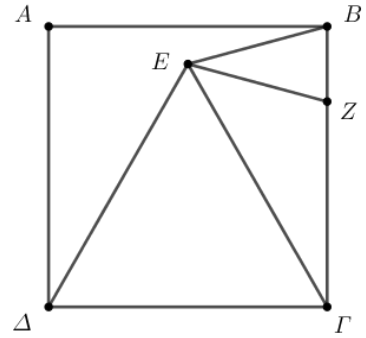
Οι αριθμοί 2001, 2002, . . . , 2010 έχουν συνολικό άθροισμα ψηφίων

$$2 \cdot 10 + (1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 1 = 20 + 45 + 1 = 66$$

Συνεπώς ο 40-ψήφιος αριθμός που προκύπτει (με οποιαδήποτε σειρά και αν τοποθετήσουμε τους δέκα αριθμούς) είναι πολλαπλάσιο του 3 και άρα σύνθετος.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισόπλευρο και το τρίγωνο BEZ είναι ισοσκελές με $BE = EZ$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\Gamma\hat{E}Z$.



Προτεινόμενη Λύση

Επειδή το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισόπλευρο, τότε $\Delta\hat{\Gamma}E = 60^\circ$. Άρα $B\hat{\Gamma}E = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Έχουμε $B\Gamma = \Gamma\Delta = \Gamma E$ άρα το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές. Επομένως

$$\Gamma\hat{E}B = \Gamma\hat{B}E = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Επειδή το τρίγωνο BEZ είναι ισοσκελές με $BE = EZ$, τότε $Z\hat{E}B = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Άρα η ζητούμενη γωνία θα είναι $\Gamma\hat{E}Z = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.