



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2025

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/11/2025

Ωρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left\{ 1 - \left[\left(2 - \frac{3}{2} \right)^2 - \left(1 - \frac{3}{4} : \frac{3}{16} \right) \right] \right\} : \left(\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2 \right) + (-2)^2 - 2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} : \frac{3}{2} \cdot 2$$

β. Ο Ανδρέας ξόδεψε τα $\frac{2}{5}$ των χρημάτων του και του έμειναν €72. Η Βασιλική είχε τριπλάσια χρήματα από τον Ανδρέα στην αρχή, αλλά ξόδεψε τα $\frac{3}{4}$ αυτών. Ποιος έχει τώρα περισσότερα χρήματα και πόσα περισσότερα;

Προτεινόμενες Λύσεις

α.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ 1 - \left[\left(2 - \frac{3}{2} \right)^2 - \left(1 - \frac{3}{4} : \frac{3}{16} \right) \right] \right\} : \left(\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2 \right) + (-2)^2 - 2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} : \frac{3}{2} \cdot 2 \\ &= \left\{ 1 - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{3} \right) \right] \right\} : \left(\frac{9}{4} - 2 \right) + 4 - 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \\ &= \left\{ 1 - \left[\frac{1}{4} - (1 - 4) \right] \right\} : \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} + 3 \right) \right\} \cdot 4 + \frac{1}{2} = \\ &= \left\{ 1 - \frac{13}{4} \right\} \cdot 4 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2} = -9 + \frac{1}{2} = -8\frac{1}{2} \end{aligned}$$

β. Τα $\frac{3}{5}$ των χρημάτων του Αντρέα είναι €72.

Το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων του Αντρέα είναι $€72 \div 3 = €24$, επομένως όλα του τα λεφτά είναι: $5 \times 24 = €120$.

Η Βασιλική είχε τριπλάσια χρήματα από τον Ανδρέα στην αρχή, άρα είχε €360.

Αφού ξόδεψε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων του του έμειναν: $\frac{1}{4} \times 360 = €90$

Άρα, η Βασιλική έχει τώρα περισσότερα χρήματα από τον Αντρέα, αφού έχει τώρα €90 ενώ ο Αντρέας = €72. Έτσι η Βασιλική έχει τώρα $€90 - €72 = €18$ περισσότερα.

Πρόβλημα 2

Γράφουμε την ακολουθία 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, ... η οποία επαναλαμβάνεται.

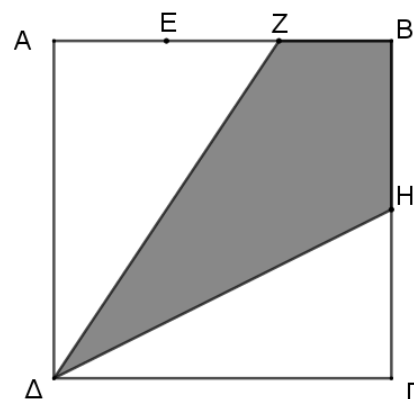
- α) Ποιος αριθμός βρίσκεται στη 25^η θέση;
β) Ποιος αριθμός βρίσκεται στη 2023^η θέση;
γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων 2023 όρων.

Προτεινόμενες λύσεις

- α. Η ακολουθία 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, επαναλαμβάνεται κάθε 4 αριθμούς (έχει περίοδο δηλαδή 4). Αφού $25 = 6 \cdot 4 + 1$, σημαίνει ότι ο αριθμός που θα βρίσκεται στην 25^η θέση θα είναι ο 1^{ος} όρος των αριθμών 2,4,6,8 δηλαδή θα είναι το 2 .
- β. Όμοια γράφουμε $2023 = 505 \cdot 4 + 3$. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 3^{ος} αριθμός από τους: 2,4,6,8, δηλαδή το 6.
- γ. Για το άθροισμα των πρώτων 2023 όρων, έχουμε :
- $$505 \times (2 + 4 + 6 + 8) + 2 + 4 + 6 = 505 \times 20 + 12 = 10100 + 12 = \mathbf{10112}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στην πλευρά AB παίρνουμε σημεία E και Z ώστε $AE = EZ = ZB$ και στην πλευρά $B\Gamma$ σημείο H ώστε $BH = H\Gamma$. Αν το εμβαδόν του τετράπλευρου $ZB\Delta H$ είναι 15 cm^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Προτεινόμενη λύση

Φέροντας τη διαγώνιο $B\Delta$ το τρίγωνο $B\Delta Z$ κατέχει το $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{2}$ του συνολικού τετραγώνου, δηλαδή το Εμβαδόν του τριγώνου $B\Delta Z$ είναι το $\frac{1}{6}$ του τετραγώνου. Το τρίγωνο $B\Delta H$ κατέχει το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{2}$ του συνολικού τετραγώνου, δηλαδή το $\frac{1}{4}$ του τετραγώνου.

Έτσι το σκιασμένο μέρος, δηλαδή το τετράπλευρο $ZB\Delta H$, κατέχει το $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$ του τετραγώνου.

Αφού το $\frac{5}{12}$ του τετραγώνου έχουν Εμβαδό ίσο με 15 cm^2 , τότε το $\frac{1}{12}$ του τετραγώνου θα έχει εμβαδόν ίσο με 3 cm^2 .

Επομένως όλο το τετράγωνο θα έχει εμβαδόν $12 \times 3 = \mathbf{36 \text{ cm}^2}$.

Εναλλακτική λύση

Θεωρούμε ότι $AE = EZ = ZB = x$. Επομένως $BH = H\Gamma = \frac{3x}{2}$.

Προκύπτει ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AZ\Delta$ είναι ίσο με: $E_{AZ\Delta} = \frac{AZ \cdot \Delta\Delta}{2} = \frac{2x \cdot 3x}{2} = 3x^2 \text{ cm}^2$

Ομοίως, το εμβαδόν του τριγώνου $H\Delta\Gamma$ είναι ίσο με: $E_{H\Delta\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma \cdot H\Gamma}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{3x}{2} = \frac{9x^2}{4} \text{ cm}^2$

Συνεπώς, ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ZB\Delta H$ είναι ίσο με:

$$E_{ZBHA} = E_{ABGA} - E_{AZA} - E_{HAG} \Rightarrow 15 = 9x^2 - 3x^2 - \frac{9x^2}{4} \Rightarrow$$

$$6x^2 - \frac{9x^2}{4} = 15 \Rightarrow 24x^2 - 9x^2 = 60 \Rightarrow 15x^2 = 60 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

Επομένως, όλο το τετράγωνο θα έχει εμβαδόν: $E_{ABGA} = 9 \cdot 2^2 = 36 \text{ cm}^2$.

Πρόβλημα 4

Η Άννα, ο Βασίλης, ο Γιώργος και η Δανάη, σκέφτονται ο καθένας από έναν διαφορετικό πρώτο αριθμό. Το άθροισμα των αριθμών της Άννας και του Βασίλη, ισούται με τον αριθμό του Γιώργου. Το άθροισμα των αριθμών της Άννας και του Γιώργου, ισούται με τον αριθμό της Δανάης. Να βρείτε όλες τους δυνατούς αριθμούς που μπορεί να σκεφτούν η Άννα, ο Βασίλης, ο Γιώργος και η Δανάη ώστε να ισχύουν τα πιο πάνω.

Προτεινόμενη λύση

Γράφουμε τους πρώτους αριθμούς **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...**

Παρατηρούμε ότι ο μοναδικός άρτιος αριθμός είναι το 2, ενώ όλοι οι άλλοι είναι περιττοί.

Αν ο αριθμός της Άννας και ο αριθμός του Γιώργου είναι και οι δυο περιττοί αριθμοί, τότε το άθροισμα θα είναι ίσο με άρτιο αριθμό, και άρα ο αριθμός της Δανάης θα είναι άρτιος. Αφού όμως ο αριθμός της Δανάης είναι πρώτος αριθμός, αυτό σημαίνει πως πρέπει να ισούται με το 2. Εύκολα όμως βλέπουμε πως δεν υπάρχουν δυο πρώτοι αριθμοί με άθροισμα ίσο με 2. Επομένως, τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς της Άννας και του Γιώργου θα είναι άρτιος και συγκεκριμένα ίσος με το 2 (αφού το 2 είναι ο μόνος άρτιος πρώτος αριθμός).

Αφού όμως ο αριθμός του Γιώργου είναι το άθροισμα δυο πρώτων αριθμών, δεν μπορεί να ισούται με 2. Άρα, ο αριθμός της Άννας είναι ίσος με 2.

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός του Γιώργου είναι κατά 2 μεγαλύτερος από τον αριθμό του Βασίλη, και ο αριθμός της Δανάης είναι κατά 4 μεγαλύτερος από τον αριθμό του Βασίλη. Τότε όμως θα έχουμε ότι είτε ο αριθμός του Βασίλη, είτε του Γιώργου, είτε της Δανάης, θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν ο αριθμός του Βασίλη δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε το υπόλοιπο του όταν διαιρεθεί με το 3 θα είναι είτε 1, είτε 2. Δηλαδή ο αριθμός του Βασίλη θα είναι της μορφής $3k + 1$ ή $3k + 2$ αντίστοιχα.

Τότε όμως στην πρώτη περίπτωση ο Γιώργος θα έχει αριθμό της μορφής:

$$3k + 1 + 2 = 3(k + 1) = \text{πολλαπλάσιο του 3}$$

και στη δεύτερη περίπτωση η Δανάη θα έχει αριθμό της μορφής:

$$3k + 2 + 4 = 3(k + 2) = \text{πολλαπλάσιο του 3}$$

Επομένως ο αριθμός του Γιώργου ή ο αριθμός της Δανάης αντίστοιχα, θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Ο μόνος πρώτος αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 3 είναι το 3. Παρατηρούμε ότι $3 - 2 = 1$ και $3 - 4 = -1$ δεν είναι πρώτοι αριθμοί, επομένως αναγκαστικά το 3 είναι ο αριθμός του Βασίλη.

Έχουμε άρα ότι οι αριθμοί της Άννας, του Βασίλη, του Γιώργου και της Δανάης είναι: **2, 3, 5, 7** αντίστοιχα.