ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2020 (ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021)

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 28/2/2021 *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$K=\sqrt{\eta\mu^4x+4\sigma\upsilon\nu^2x}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^4x+4\eta\mu^2x}$$

είναι ανεξάρτητη του x, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

$$\begin{aligned}K&=\sqrt{\eta\mu^4x+4\sigma\upsilon\nu^2x}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^4x+4\eta\mu^2x}\\&=\sqrt{\eta\mu^4x+4(1-\eta\mu^2x)}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^4x+4(1-\sigma\upsilon\nu^2x)}\\&=\sqrt{\eta\mu^4x-4\eta\mu^2x+4}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^4x-4\sigma\upsilon\nu^2x+4}\\&=\sqrt{(\eta\mu^2x-2)^2}+\sqrt{(\sigma\upsilon\nu^2x-2)^2}\\&=|\eta\mu^2x-2|+|\sigma\upsilon\nu^2x-2|\\&=-\eta\mu^2x+2-\sigma\upsilon\nu^2x+2=4-1=3\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Οι αριθμοί p,q είναι θετικοί διψήφιοι πρώτοι, τέτοιοι ώστε $p^2-q^2=2p+6q+8$.
Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του αθροίσματος $S=p+q$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

$$p^2-q^2=2p+6q+8\Leftrightarrow \mathrm{p}^2-2p+1-(q^2+6q+9)=0\Leftrightarrow(p-1)^2-(q+3)^2=0$$

$$((p-1)-(q+3))((p-1)+(q+3))=0\Leftrightarrow(p-q-4)(p+q+2)=0$$

$$p,q>0\Longrightarrow p+q+2>0\Longrightarrow p-q-4=0\Longrightarrow p=q+4$$

Διψήφιοι πρώτοι αριθμοί ξεκινώντας από τους μεγαλύτερους είναι οι:

$$97,89,83,79,\ldots$$

Άρα, οι μεγαλύτεροι διψήφιοι πρώτοι που ικανοποιούν τη σχέση $p=q+4$ είναι οι

$$p=83,q=79$$

Κατά συνέπεια η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του αθροίσματος S είναι

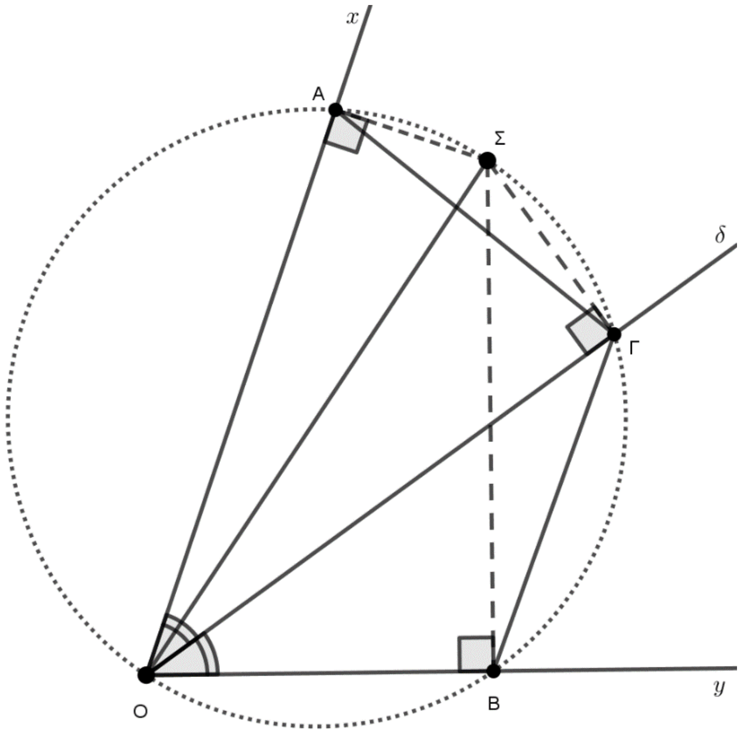
$$S=83+79=162.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε οξεία γωνία $\angle xOy$, τη διχοτόμο της $O\delta$ και σημείο Σ, εσωτερικό της γωνίας, το οποίο δεν βρίσκεται στη διχοτόμο $O\delta$. Από το Σ φέρουμε $\Sigma A, \Sigma B$ και $\Sigma \Gamma$ κάθετες στις πλευρές Ox, Oy και στη διχοτόμο $O\delta$, αντίστοιχα (A σημείο της Ox, B σημείο της Oy και Γ σημείο της $O\delta$).

Να αποδείξετε ότι $\Gamma A = \Gamma B$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:



Παρατηρούμε ότι τα σημεία A, B, Γ ανήκουν στο κύκλο διαμέτρου $O\Sigma$, αφού το $O\Sigma$ φαίνεται και από τα τρία σημεία υπό ορθή γωνία.

Στον κύκλο αυτό οι γωνίες $\angle xO\delta$ και $\angle yO\delta$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα τόξα $\widehat{\Gamma A}$ και $\widehat{\Gamma B}$ αντίστοιχα.

Επειδή η $O\delta$ είναι διχοτόμος της xOy, είναι $\angle xO\delta = \angle yO\delta$, άρα και τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{\Gamma A}$ και $\widehat{\Gamma B}$ είναι ίσα και οι αντίστοιχες χορδές είναι επίσης ίσες.

Συνεπώς $\Gamma A = \Gamma B$

Πρόβλημα 4

Αν $0 < x < 1$, να αποδείξετε ότι $(1 + x)^\nu + (1 - x)^\nu < 2^\nu$, για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 2$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^\nu + \left(\frac{1-x}{2}\right)^\nu < 1 : \ (A)$$

Θέτουμε

$$\frac{1+x}{2} = \alpha \quad \text{και} \quad \frac{1-x}{2} = \beta$$

οπότε η (A) γράφεται $\alpha^\nu + \beta^\nu < 1$ με $\alpha + \beta = 1$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$

Προφανώς, λόγω των πιο πάνω, έχουμε για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^\nu < \alpha \\ \beta^\nu < \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha^\nu + \beta^\nu < \alpha + \beta = 1$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.