



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2025

«Α' Λυκείου»

Ημερομηνία: 8/11/2025 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε το σύνολο τιμών της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η πιο κάτω εξίσωση έχει λύσεις στους πραγματικούς αριθμούς :

$$\frac{1}{x + \alpha - 1} - \frac{2\alpha}{x^2 - \alpha^2 + 2\alpha - 1} = \frac{5}{x - \alpha + 1}$$

Προτεινόμενη Λύση

Γράφουμε ξανά την εξίσωση και παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

$$\frac{1}{x + \alpha - 1} - \frac{1}{x - \alpha + 1} = \frac{2\alpha}{(x + \alpha - 1)(x - \alpha + 1)}$$

Έχουμε ότι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των παρονομαστών είναι:

$$ΕΚΠ = (x + \alpha - 1)(x - \alpha + 1)$$

Θα πρέπει, $x + \alpha - 1 \neq 0$ και $x - \alpha + 1 \neq 0$. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$x \neq -\alpha + 1, x \neq \alpha - 1 \quad (1)$$

Κάνοντας απαλοιφή των παρονομαστών θα έχουμε:

$$x - \alpha + 1 - 5(x + \alpha - 1) = 2\alpha \iff 4x = -8\alpha + 6 \iff 2x = -4\alpha + 3$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης είναι:

$$x = \frac{-4\alpha + 3}{2}$$

Λόγω της (1) θα πάρουμε:

- $x \neq -\alpha + 1 \Rightarrow \frac{-4\alpha+3}{2} \neq -\alpha + 1 \iff \alpha \neq \frac{1}{2}$
- $x \neq \alpha - 1 \Rightarrow \frac{-4\alpha+3}{2} \neq \alpha - 1 \iff \alpha \neq \frac{5}{6}$

Άρα, το σύνολο τιμών της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση έχει λύσεις στους πραγματικούς αριθμούς είναι:

$$\alpha \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}) \cup (\frac{5}{6}, +\infty)$$

Πρόβλημα 2. i. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση

$$A = (x+2)^4 - x^4$$

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει:

$$(2x+2)^3 < A < (2x+3)^3$$

iii. Να αποδείξετε ότι αν ν είναι μη αρνητικός ακέραιος, ο αριθμός $M = \sqrt[3]{(\nu+2)^4 - \nu^4}$ δεν είναι φυσικός αριθμός.

Προτεινόμενη Λύση

i. Η παράσταση A γίνεται διαδοχικά

$$A = [(x+2)^2 - x^2][(x+2)^2 + x^2] = (x+2-x)(x+2+x)(2x^2 + 4x + 4)$$

επομένως παίρνουμε τελικά

$$A = 2^3(x+1)(x^2 + 2x + 2)$$

ii. Αποδεικνύουμε δύο ανισότητες την αριστερή και την δεξιά ανισότητα.

► Η αριστερή ανισότητα $(2x+2)^3 < A$ γράφεται

$$(2x+2)^3 < 2^3(x+1)(x^2 + 2x + 2) \iff 2^3(x+1)[(x+1)^2 - (x^2 + 2x + 2)] < 0$$

Η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$-2^3(x+1) < 0$$

που αφού από την υπόθεση ισχύει $x > -1$, η ανισότητα είναι αληθής.

► Η δεξιά ανισότητα $A < (2x+3)^3$ γράφεται

$$2^3(x+1)(x^2 + 2x + 2) < (2x+3)^3 \iff 2^3(x+1)(x^2 + 2x + 2) - (2x+3)^3 < 0$$

Η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$8(x+1)(x^2 + 2x + 2) - (8x^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3(2x)3^2 + 3^3) < 0$$

ή διαφορετικά

$$8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) - (8x^3 + 36x^2 + 54x + 27) < 0$$

η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$-(12x^2 + 22x + 11) < 0$$

Όμως η διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x) = 12x^2 + 22x + 11$ είναι $\Delta = 22^2 - 4 \cdot 12 \cdot 11 = -44$. Επομένως αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός θα έχουμε $f(x) = 12x^2 + 22x + 11 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η ανισότητα

$$-(12x^2 + 22x + 11) < 0$$

είναι αληθής. Άρα για κάθε $x > -1$ ισχύει:

$$(2x + 2)^3 < A < (2x + 3)^3$$

iii. Ο αριθμός M γράφεται, $M^3 = (\nu + 2)^4 - \nu^4$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα για $x = \nu \geq 0$ θα πάρουμε

$$(2\nu + 2)^3 < (\nu + 2)^4 - \nu^4 < (2\nu + 3)^3$$

επομένως

$$(2\nu + 2)^3 < M^3 < (2\nu + 3)^3 \iff 2\nu + 2 < M < 2\nu + 3$$

Άρα ο αριθμός $M = \sqrt[3]{(\nu + 2)^4 - \nu^4}$ βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών επομένως δεν θα είναι φυσικός αριθμός.

Πρόβλημα 3. Με τον συμβολισμό $\overline{xy\omega}$ θεωρούμε ότι ο αριθμός $xy\omega$ βρίσκεται σε δεκαδική αναπαράσταση δηλαδή $\overline{xy\omega} = 100x + 10y + \omega$. Να υπολογίσετε όλα τα αθροίσματα της μορφής

$$S = \overline{4\alpha 5} + \overline{2\beta 7} + \overline{1\gamma 4}$$

τα οποία διαιρούνται με το 9.

Προτεινόμενη Λύση

Το άθροισμα S γράφεται:

$$S = \overline{4\alpha 5} + \overline{2\beta 7} + \overline{1\gamma 4} = (4 \cdot 10^2 + \alpha \cdot 10 + 5) + (2 \cdot 10^2 + \beta \cdot 10 + 7) + (1 \cdot 10^2 + \gamma \cdot 10 + 4)$$

ή διαφορετικά

$$S = 7 \cdot 10^2 + 10(\alpha + \beta + \gamma) + 16 = 10(\alpha + \beta + \gamma) + 716$$

Επομένως παίρνουμε

$$S = 9(\alpha + \beta + \gamma + 79) + (\alpha + \beta + \gamma + 5)$$

Επειδή, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ θα ισχύει

$$0 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 27$$

Άρα για να διαιρείται το S με το 9 θα πρέπει το $\alpha + \beta + \gamma + 5$ να διαιρείται με το 9. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

✓ Αν $\alpha + \beta + \gamma = 4$ τότε το $9|S$ και παίρνουμε

$$S = 9(4 + 79) + (4 + 5) = 756$$

✓ Αν $\alpha + \beta + \gamma = 13$ τότε το $9|S$ και παίρνουμε

$$S = 9(13 + 79) + (13 + 5) = 846$$

✓ Αν $\alpha + \beta + \gamma = 22$ τότε το $9|S$ και παίρνουμε

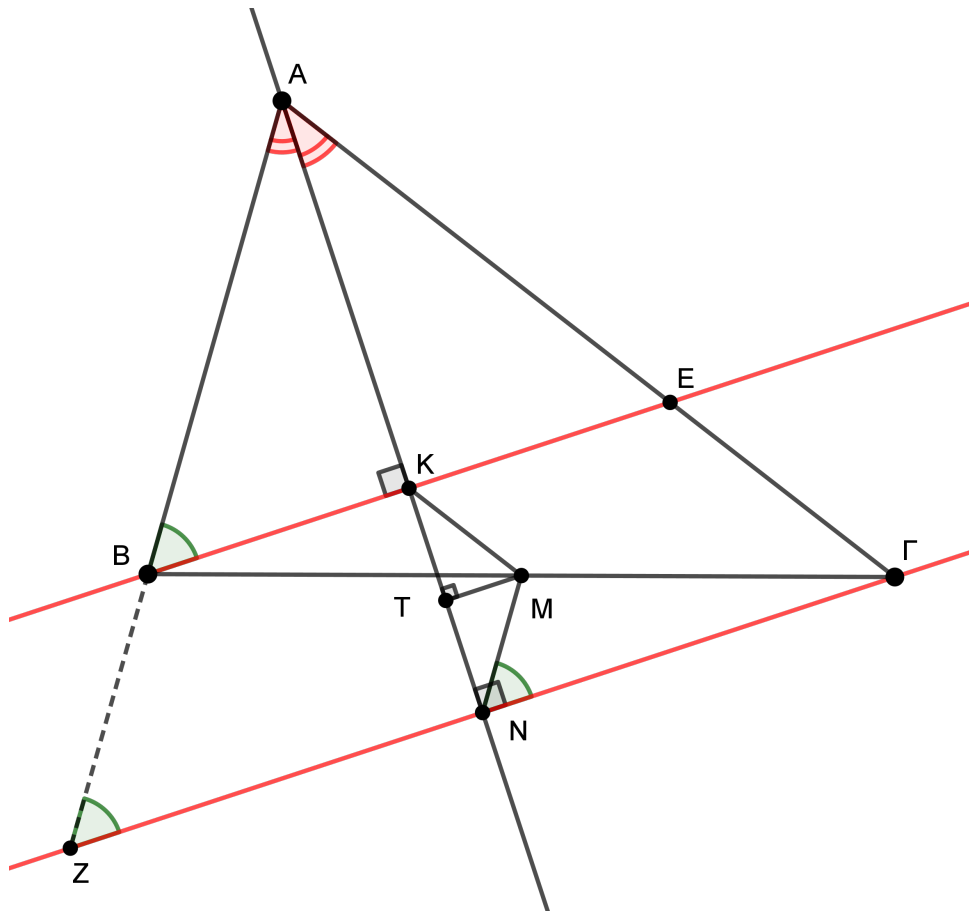
$$S = 9(22 + 79) + (22 + 5) = 936$$

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο του $B\Gamma$. Πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $AB = AE$. Η κάθετη από το σημείο A προς την ευθεία BE τέμνει την BE στο σημείο K . Η παράλληλη από το σημείο Γ προς την BE τέμνει την ευθεία AK στο σημείο N . Αν T είναι το μέσο του KN να αποδείξετε ότι:

- Οι ευθείες MT και KN τέμνονται κάθετα.
- Οι γωνίες $\angle MNT$ και $\angle ABK$ είναι ίσες.

Προτεινόμενη Λύση

- Από την υπόθεση έχουμε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές και $AK \perp BE$. Άρα η ευθεία AK είναι και διχοτόμος της γωνίας $\angle BAE$. Επίσης, επειδή $\Gamma N \parallel BE$ θα έχουμε ότι $AN \perp \Gamma N$.



Προεκτείνουμε την ευθεία AB και έστω Z το σημείο τομής της με την ευθεία ΓN . Τότε στο τρίγωνο $Z\Lambda\Gamma$ η ευθεία AN είναι ύψος και διχοτόμος. Επομένως το τρίγωνο $Z\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AZ = A\Gamma$. Επειδή όμως $AB = AE$ θα πάρουμε

$$BZ = E\Gamma$$

Στο τρίγωνο BEG έχουμε ότι τα σημεία K και M είναι τα μέσα των πλευρών BE και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα

$$KM \parallel \frac{E\Gamma}{2}$$

Επίσης, στο τρίγωνο ZBG έχουμε ότι τα σημεία N και M είναι τα μέσα των πλευρών GZ και BG αντίστοιχα. Άρα

$$MN = \parallel \frac{BG}{2}$$

Άρα $KM = MN$. Επομένως το τρίγωνο KMN είναι ισοσκελές. Αφού από την υπόθεση η MT είναι διάμεσος του τριγώνου KMN θα είναι και ύψος, δηλαδή

$$MT \perp KN$$

ii. Επειδή $BE \parallel GZ$ έχουμε

$$\angle ABE = \angle AZG \quad (1)$$

και επειδή $BZ \parallel MN$ έχουμε

$$\angle MNG = \angle AZG \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι

$$\angle MNG = \angle ABE = \angle ABK$$