Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2026

«Α΄ Λυκείου»

Ημερομηνία: 7/11/2026 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

Οδηγιες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Πρόβλημα 1. i. Να αποδείξετε ότι η αριθμητική παράσταση

$$A = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

είναι φυσικός αριθμός.

ii. Για κάθε φυσικό αριθμό $\nu > 1$ θεωρούμε τον αριθμό

$$B = \frac{\nu+\sqrt{\nu}}{\nu-\sqrt{\nu}} + \frac{\nu-\sqrt{\nu}}{\nu+\sqrt{\nu}}.$$

Να αποδείξετε ότι $B = 2 + \dfrac{4}{\nu-1}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του ν ο αριθμός B είναι φυσικός.

Πρόβλημα 2. i. Ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται *παράξενος* εάν είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από ένα τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 3^4+4 μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο παράξενων αριθμών.
Σημείωση: Για παράδειγμα, ο αριθμός $10 = 9+1$ είναι παράξενος, αφού ο $9 = 3^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $\nu \geqslant 2$ ο αριθμός ν^4+4 δεν είναι πρώτος.

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(2026^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(2028^4+4)}.$$

Πρόβλημα 3. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$. Πάνω στην πλευρά $\Gamma\Delta$ παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Η κάθετη από το σημείο B προς τη διαγώνιο $A\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E. Ονομάζουμε O το σημείο τομής των διαγωνίων του ορθογωνίου. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle OEB$ τέμνει την ευθεία BZ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία BZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle EBO$.

ii. Η ευθεία OK είναι παράλληλη προς τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ του ορθογωνίου.

Πρόβλημα 4. i. Αν p, q είναι φυσικοί αριθμοί, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$p^2+pq+2p+q+1.$$

ii. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι και δ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους, να αποδείξετε ότι ο δ διαιρεί τη διαφορά $\alpha-\beta$.

iii. Να βρείτε όλα τα ζεύγη (p, q) πρώτων αριθμών για τα οποία ο αριθμός $p^2+pq+2p+q+1$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.