# Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

**ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**
**ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2026**

## «Α′ Λυκείου»

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

Ημερομηνία: 7/11/2026 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

---

**Πρόβλημα 1.** i. Να αποδείξετε ότι η αριθμητική παράσταση

$$A = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

είναι φυσικός αριθμός.

ii. Για κάθε φυσικό αριθμό $\nu > 1$ θεωρούμε τον αριθμό

$$B = \frac{\nu+\sqrt{\nu}}{\nu-\sqrt{\nu}} + \frac{\nu-\sqrt{\nu}}{\nu+\sqrt{\nu}}.$$

Να αποδείξετε ότι $B = 2 + \dfrac{4}{\nu-1}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του $\nu$ ο αριθμός $B$ είναι φυσικός.

**Λύση.**

**(i)** Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα. Ο κοινός παρονομαστής είναι $(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = 4-2 = 2$, οπότε

$$A = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2 + \left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{\left(6+4\sqrt{2}\right) + \left(6-4\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{12}{2} = 6,$$

που είναι φυσικός αριθμός.

**(ii)** Αφού $\nu > 1$, ισχύει $\sqrt{\nu} > 1$, άρα $\nu = \sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu} > \sqrt{\nu}$ και οι παρονομαστές είναι θετικοί. Ο κοινός παρονομαστής είναι

$$\left(\nu-\sqrt{\nu}\right)\left(\nu+\sqrt{\nu}\right) = \nu^2 - \nu = \nu(\nu-1),$$

ενώ ο αριθμητής είναι

$$\left(\nu+\sqrt{\nu}\right)^2 + \left(\nu-\sqrt{\nu}\right)^2 = \left(\nu^2+2\nu\sqrt{\nu}+\nu\right) + \left(\nu^2-2\nu\sqrt{\nu}+\nu\right) = 2\nu^2+2\nu = 2\nu(\nu+1).$$

Επομένως

$$B = \frac{2\nu(\nu+1)}{\nu(\nu-1)} = \frac{2(\nu+1)}{\nu-1} = \frac{2(\nu-1)+4}{\nu-1} = 2 + \frac{4}{\nu-1}.$$

Ο $B$ είναι φυσικός αν και μόνο αν ο $\dfrac{4}{\nu-1}$ είναι ακέραιος, δηλαδή αν και μόνο αν ο θετικός ακέραιος $\nu-1$ είναι διαιρέτης του 4:

$$\nu-1 \in \{1,2,4\} \iff \nu \in \{2,3,5\},$$

οπότε αντίστοιχα $B=6$, $B=4$ και $B=3$.

**Απάντηση**: $\nu \in \{2,\ 3,\ 5\}$.

*(Παρατήρηση: για $\nu = 2$ ο $B$ συμπίπτει με τον αριθμό $A$ του (i), και πράγματι $2+\frac{4}{1} = 6$.)*

**Πρόβλημα 2.** i. Ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται *παράξενος* εάν είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από ένα τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $3^4+4$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο παράξενων αριθμών.
*Σημείωση:* Για παράδειγμα, ο αριθμός $10=9+1$ είναι παράξενος, αφού ο $9=3^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $\nu \geqslant 2$ ο αριθμός $\nu^4+4$ δεν είναι πρώτος.

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(2026^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(2028^4+4)}.$$

**Λύση.**

**(i)** Έχουμε

$$3^4+4=85=5\cdot 17=\left(2^2+1\right)\left(4^2+1\right),$$

και οι αριθμοί $5=2^2+1$ και $17=4^2+1$ είναι παράξενοι. Παρατηρούμε ότι $2=3-1$ και $4=3+1$, δηλαδή

$$3^4+4=\left[(3-1)^2+1\right]\left[(3+1)^2+1\right].$$

**(ii)** Το (i) υποδεικνύει την παραγοντοποίηση: για κάθε πραγματικό $x$ ισχύει

$$\begin{aligned} x^4+4&=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right)\\ &=\left[(x-1)^2+1\right]\left[(x+1)^2+1\right]. \end{aligned} \qquad (*)$$

Έστω ακέραιος $\nu \geqslant 2$. Από την $(*)$,

$$\nu^4+4=\left[(\nu-1)^2+1\right]\left[(\nu+1)^2+1\right].$$

Οι δύο παράγοντες είναι θετικοί ακέραιοι και, αφού $\nu \geqslant 2$, έχουμε $(\nu-1)^2+1 \geqslant 2$ και $(\nu+1)^2+1 \geqslant 10$. Επομένως ο $\nu^4+4$ γράφεται ως γινόμενο δύο ακεραίων μεγαλύτερων του 1, άρα δεν είναι πρώτος.

(Για $\nu=1$ ο πρώτος παράγοντας ισούται με 1 και πράγματι ο $1^4+4=5$ είναι πρώτος.)

**(iii)** Θέτουμε $g(m)=m^2+1$. Από την $(*)$, για κάθε ακέραιο $\kappa$ ισχύει $\kappa^4+4=g(\kappa-1)\,g(\kappa+1)$. Επομένως

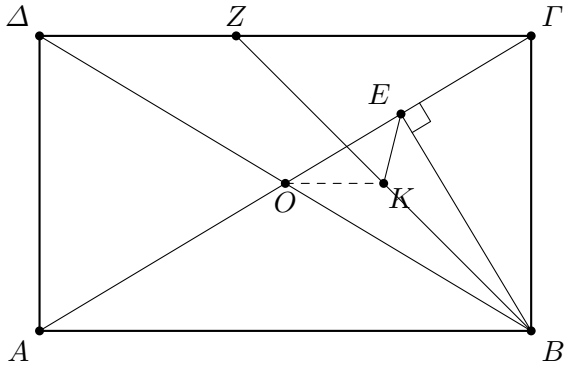
$$(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(2026^4+4)=g(1)g(3)\cdot g(5)g(7)\cdot g(9)g(11)\cdots g(2025)g(2027),$$
$$(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(2028^4+4)=g(3)g(5)\cdot g(7)g(9)\cdot g(11)g(13)\cdots g(2027)g(2029).$$

Ο αριθμητής είναι το γινόμενο των $g(m)$ για όλους τους περιττούς $m$ από 1 μέχρι 2027, ενώ ο παρονομαστής το γινόμενο των $g(m)$ για όλους τους περιττούς $m$ από 3 μέχρι 2029. Μετά τις απλοποιήσεις μένει

$$A=\frac{g(1)}{g(2029)}=\frac{2}{2029^2+1}=\frac{2}{4116842}=\frac{1}{2058421}.$$

**Πρόβλημα 3.** Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$. Πάνω στην πλευρά $\Gamma\Delta$ παίρνουμε σημείο $Z$ τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Η κάθετη από το σημείο $B$ προς τη διαγώνιο $A\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο $E$. Ονομάζουμε $O$ το σημείο τομής των διαγωνίων του ορθογωνίου. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle OEB$ τέμνει την ευθεία $BZ$ στο σημείο $K$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $BZ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle EBO$.
ii. Η ευθεία $OK$ είναι παράλληλη προς τις πλευρές $AB$ και $\Gamma\Delta$ του ορθογωνίου.




**Λύση.**

**(i)** Στο τρίγωνο $B\Gamma Z$ ισχύει $\angle B\Gamma Z = 90^\circ$ και $\Gamma Z = B\Gamma$, άρα είναι ορθογώνιο ισοσκελές και $\angle \Gamma BZ = 45^\circ$. Αφού $\angle AB\Gamma = 90^\circ$, έπεται ότι και $\angle ABZ = 45^\circ$.

Θέτουμε $\varphi = \angle A\Gamma B$.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ABE$ (με $\angle AEB = 90^\circ$) ισχύει $\angle ABE = 90^\circ - \angle BA\Gamma$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές, άρα $90^\circ - \angle BA\Gamma = \angle A\Gamma B$. Επομένως $\angle ABE = \varphi$.
- Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $OB = O\Gamma$. Το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $\angle OB\Gamma = \angle O\Gamma B = \varphi$ και $\angle ABO = 90^\circ - \varphi$.

Αφού $AB > B\Gamma$, στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\angle A\Gamma B > \angle BA\Gamma$, δηλαδή $\varphi > 90^\circ - \varphi$, άρα $\varphi > 45^\circ$. Επομένως

$$\angle ABO = 90^\circ - \varphi < 45^\circ = \angle ABZ < \varphi = \angle ABE,$$

δηλαδή, ξεκινώντας από την ημιευθεία $BA$, οι ημιευθείες $BO$, $BZ$, $BE$, $B\Gamma$ βρίσκονται με αυτή τη σειρά. Τότε

$$\angle ZBE = \angle ABE - \angle ABZ = \varphi - 45^\circ,$$
$$\angle OBZ = \angle ABZ - \angle ABO = 45^\circ - (90^\circ - \varphi) = \varphi - 45^\circ.$$

Άρα $\angle ZBE = \angle OBZ$, δηλαδή η $BZ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle EBO$.

**(ii)** Από τη σειρά των ημιευθειών στο (i), η $BE$ τέμνει την $A\Gamma$ πιο κοντά στο $\Gamma$ από ό,τι η $BO$, δηλαδή το $E$ βρίσκεται πάνω στο τμήμα $O\Gamma$. Το τρίγωνο $OEB$ είναι ορθογώνιο στο $E$, αφού $BE \perp A\Gamma$.

Το σημείο $K$ είναι η τομή της διχοτόμου της γωνίας $\angle OEB$ με την $BZ$, που από το (i) είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle EBO$. Άρα το $K$ είναι το σημείο τομής δύο διχοτόμων του τριγώνου $OEB$, δηλαδή το έγκεντρό του. Επομένως και η $OK$ είναι διχοτόμος, της γωνίας $\angle EOB = \angle \Gamma OB$.

Το τρίγωνο $AOB$ είναι ισοσκελές ($OA = OB$), άρα $\angle OBA = \angle OAB$, και η εξωτερική γωνία του στο $O$ είναι

$$\angle BO\Gamma = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle OAB.$$

Επομένως

$$\angle KO\Gamma = \frac{1}{2}\angle BO\Gamma = \angle OAB = \angle \Gamma AB.$$

Οι ευθείες $OK$ και $AB$ τέμνονται από την $A\Gamma$ και σχηματίζουν ίσες εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ($\angle KO\Gamma = \angle BA\Gamma$, με τα $K$, $B$ στο ίδιο μέρος της $A\Gamma$). Άρα $OK \parallel AB$, και αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$, ισχύει και $OK \parallel \Gamma\Delta$.

**Πρόβλημα 4.** i. Αν $p, q$ είναι φυσικοί αριθμοί, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$p^2 + pq + 2p + q + 1.$$

ii. Αν $\alpha, \beta$ είναι θετικοί ακέραιοι και $\delta$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους, να αποδείξετε ότι ο $\delta$ διαιρεί τη διαφορά $\alpha - \beta$.

iii. Να βρείτε όλα τα ζεύγη $(p, q)$ πρώτων αριθμών για τα οποία ο αριθμός $p^2 + pq + 2p + q + 1$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

**Λύση.**

**(i)** Ομαδοποιούμε τους όρους:

$$p^2 + pq + 2p + q + 1 = \big(p^2 + 2p + 1\big) + (pq + q) = (p+1)^2 + q(p+1) = (p+1)(p+q+1).$$

**(ii)** Αφού ο $\delta$ διαιρεί τους $\alpha$ και $\beta$, υπάρχουν ακέραιοι $\kappa, \lambda$ με $\alpha = \delta\kappa$ και $\beta = \delta\lambda$. Τότε

$$\alpha - \beta = \delta\kappa - \delta\lambda = \delta(\kappa - \lambda),$$

και αφού ο $\kappa - \lambda$ είναι ακέραιος, ο $\delta$ διαιρεί τη διαφορά $\alpha - \beta$. (Το ίδιο ισχύει για κάθε κοινό διαιρέτη των $\alpha, \beta$.)

**(iii)** Από το (i), ο αριθμός είναι $N = (p+1)(p+q+1)$.

Έστω $d$ ο ΜΚΔ των $p+q+1$ και $p+1$. Από το (ii), ο $d$ διαιρεί τη διαφορά $(p+q+1)-(p+1) = q$ και, αφού ο $q$ είναι πρώτος, $d = 1$ ή $d = q$.

**1η περίπτωση**: $d = q$. Τότε $q \mid p+1$, δηλαδή $p+1 = qm$ για κάποιο θετικό ακέραιο $m$. Άρα $p+q+1 = q(m+1)$ και

$$N = q^2\, m(m+1).$$

Ο $N$ είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνο αν ο $m(m+1)$ είναι τέλειο τετράγωνο. Όμως $m^2 < m(m+1) < (m+1)^2$, δηλαδή ο $m(m+1)$ βρίσκεται αυστηρά μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων, άρα δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Επομένως αυτή η περίπτωση δεν δίνει λύσεις.

**2η περίπτωση**: $d = 1$. Οι θετικοί ακέραιοι $p+1$ και $p+q+1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και το γινόμενό τους είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε ο καθένας τους είναι τέλειο τετράγωνο: κάθε πρώτος που διαιρεί τον $N$ εμφανίζεται στον $N$ με άρτιο εκθέτη και διαιρεί μόνο έναν από τους δύο παράγοντες, άρα εμφανίζεται με άρτιο εκθέτη σε αυτόν.

- Από $p+1 = s^2$ (με $s \geqslant 2$) παίρνουμε $p = (s-1)(s+1)$. Αφού ο $p$ είναι πρώτος και $1 \leqslant s-1 < s+1$, πρέπει $s-1 = 1$, δηλαδή $s = 2$ και $p = 3$.
- Τότε $p+q+1 = q+4 = t^2$ (με $t \geqslant 3$, αφού $q+4 \geqslant 6$), οπότε $q = (t-2)(t+2)$. Αφού ο $q$ είναι πρώτος και $1 \leqslant t-2 < t+2$, πρέπει $t-2 = 1$, δηλαδή $t = 3$ και $q = 5$.

**Έλεγχος**: $3^2 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 5 + 1 = 36 = 6^2$.

**Απάντηση**: $(p, q) = (3, 5)$.