



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α' Διαγωνισμός Επιλογής κάτω των 15 1/2 Ετών

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 28/01/2023

Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο k , ο αριθμός $10k + 2023$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση. Το τελευταίο ψηφίο ενός ακεραίου είναι ένα από τα στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ και άρα του τετραγώνου του είναι ένα από τα στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Ακόμη, το τελευταίο ψηφίο ενός ακεραίου που έχει πολλαπλασιαστεί με το 10 είναι το 0.

Είναι

$$10k + 2023 = 10k + 2020 + 3 = 10(k + 202) + 3.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

- Αν $k + 202 < 0$, ο $10k + 2023$ είναι αρνητικός και ο $10k + 2023$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. (Σημείωση: Σε αυτήν την περίπτωση το τελευταίο ψηφίο του $10k + 2023$ είναι το 7.)
- Αν $k + 202 \geq 0$, το τελευταίο ψηφίο του $10k + 2023$ είναι το 3. Αφού $3 \notin \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, τότε ο $10k + 2023$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Πρόβλημα 2. Να βρείτε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που ικανοποιούν

$$3x^2 - 15x - yx^2 + 5xy - 24 = 0.$$

Πρώτη Λύση. Έχουμε

$$(5x - x^2)y = 24 + 15x - 3x^2 = 24 + 3(5x - x^2).$$

Πρέπει $5x - x^2 \neq 0$ (διαφορετικά θα είχαμε $0 = 24$) άρα

$$y = 3 - \frac{24}{x^2 - 5x}.$$

Πρέπει

$$5x - x^2 | 24 \implies x^2 - 5x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24.$$

- Οι εξισώσεις $x^2 - 5x = -8, -12, -24$ δεν έχουν πραγματικές λύσεις. ($\Delta < 0$)
- Οι εξισώσεις $x^2 - 5x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4, 8, 12$ έχουν άρρητες λύσεις. (Το Δ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.)

- Οι εξισώσεις $x^2 - 5x = -6, -4, 6, 24$ δίνουν τις λύσεις:

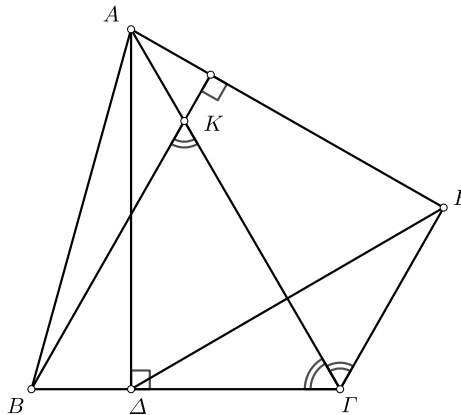
$$(x, y) = (3, 7), (2, 7), (4, 9), (1, 9), (6, -1), (-1, -1), (8, 2), (-3, 2).$$

Δεύτερη Λύση. Όπως και στην πρώτη λύση πρέπει $x^2 - 5x | 24$.

- Για $x \geq 9$ έχουμε $x^2 - 5x = x(x - 5) \geq 9 \cdot 4 = 36$, άρα $x^2 - 5x \nmid 24$.
- Για $x \leq -4$ έχουμε $x^2 - 5x = (-x)(5 - x) \geq 4 \cdot 9 = 36$, άρα $x^2 - 5x \nmid 24$.
- Για $x = -3, -2, \dots, 8$ ελέγχουμε τις τιμές μία προς μία για να βρούμε ότι $x^2 - 5x | 24$ στις περιπτώσεις $x = -3, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8$ οι οποίες μας δίνουν τα ίδια ζεύγη όπως και στην πρώτη λύση.

Πρόβλημα 3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Το σημείο E είναι το συμμετρικό του Δ ως προς την $A\Gamma$ και η κάθετη στην AE από το σημείο B τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Λύση. Τα A και Γ βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο της ΔE , επομένως $A\Delta = AE$ και $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Άρα τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα (αφού έχουν και κοινή πλευρά την $A\Gamma$).



Άρα $\angle A\Gamma E = \angle A\Gamma\Delta = 90^\circ$ και συνεπώς η ΓE είναι παράλληλη της BK . Επομένως $\angle E\Gamma A = \angle B\Gamma K$ (εντός εναλλάξ). Αφού τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε επίσης ότι $\angle E\Gamma A = \angle A\Gamma\Delta$.

Άρα $\angle B\Gamma K = \angle A\Gamma\Delta = \angle K\Gamma B$ και το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές. ($BK = K\Gamma$)

Πρόβλημα 4. Δίνονται 100 διαφορετικοί ακέραιοι αριθμοί

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{100} \leq 400.$$

Για $i = 1, 2, \dots, 99$ ορίζουμε $d_i = a_{i+1} - a_i$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός n τέτοιος ώστε, για τουλάχιστον 15 διαφορετικές τιμές του i , να ισχύει ότι $d_i = n$.

Λύση. Έστω προς άτοπο ότι κάθε τιμή του d_i επαναλαμβάνεται το πολύ 14 φορές. Τότε η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το $d_1 + \dots + d_{99}$ είναι

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{14 \text{ φορές}} + \underbrace{2 + \dots + 2}_{14 \text{ φορές}} + \dots + \underbrace{7 + \dots + 7}_{14 \text{ φορές}} + 8 = 14 \cdot 28 + 8 = 400.$$

Άρα

$$a_{100} - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{100} - a_{99}) = d_1 + \dots + d_{99} \geq 400.$$

Αλλά τότε $a_{100} \geq 400 + a_1 \geq 401$, άτοπο.