



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/11/2014

Ώρα Εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

α) Να δείξετε ότι $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 2$

$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ αφού είναι άθροισμα θετικών αριθμών

$$A = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$B = 2 = \sqrt{\frac{8}{2}} \text{ άρα } A > B$$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\sqrt{\frac{27^{10}+9^{10}}{9^{10}+9^5}}$

$$\sqrt{\frac{27^{10}+9^{10}}{9^{10}+9^5}} = \sqrt{\frac{(3^3)^{10}+(3^2)^{10}}{(3^2)^{10}+(3^2)^5}} = \sqrt{\frac{3^{30}+3^{20}}{3^{20}+3^{10}}} = \sqrt{\frac{3^{20}(3^{10}+1)}{3^{10}(3^{10}+1)}} = \sqrt{\frac{3^{20}}{3^{10}}} = \sqrt{3^{10}} = 3^5$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\frac{ay-a^2}{y^2-ay} = \frac{a}{y}$ όπου $a \in \mathbb{N}$ και $y \notin \mathbb{N}_0$

$$\frac{ay-a^2}{y^2-ay} = \frac{a(y-a)}{y(y-a)} = \frac{a}{y}$$

β) Αν ισχύει ότι $1 + 2 + 3 + \dots + \alpha = y$

να δείξετε ότι $\frac{y-1}{y^2-y} + \frac{2y-4}{y^2-2y} + \frac{3y-9}{y^2-3y} + \dots + \frac{ay-\alpha^2}{y^2-ay} = 1$

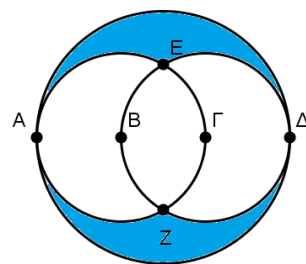
$$\frac{y-1}{y^2-y} + \frac{2y-4}{y^2-2y} + \frac{3y-9}{y^2-3y} + \dots + \frac{ay-\alpha^2}{y^2-ay}$$

Από το ερώτημα α προκύπτει

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{y} + \frac{3}{y} + \dots + \frac{\alpha}{y} = \frac{1+2+3+\dots+\alpha}{y} = \frac{y}{y} = 1$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Στο διπλανό σχήμα δύο μικροί κύκλοι τέμνονται μεταξύ τους και εφάπτονται ενός μεγαλύτερου κύκλου. Τα σημεία A, B, Γ, Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = 1$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Λύση

Έστω E_1 : Το εμβαδό του Μεγάλου Κύκλου

E_2 : Το εμβαδό ενός από τους Μικρούς Κύκλους

E_3 : Το εμβαδό της Τομής των μικρών Κύκλων.

Τότε το ζητούμενο εμβαδό (E_{ZHT}) υπολογίζεται από τη σχέση

$$E_{ZHT} = E_1 - 2E_2 + E_3.$$

Για τον υπολογισμό του E_3 εργαζόμαστε ως εξής:

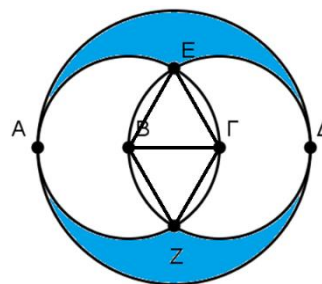
Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $EB, BZ, Z\Gamma, \Gamma E, B\Gamma$.

Ισχύει ότι $EB = BZ = Z\Gamma = \Gamma E = B\Gamma = 1 \text{ cm}$

Άρα τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $B\Gamma Z$ είναι ισόπλευρα που σημαίνει το E_3 αποτελείται από δύο κυκλικά τμήματα κύκλων ακτίνας 1 cm και γωνίας 120° .

$$E_3 = 2 \left(\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \eta\mu(120) \right) = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E_{ZHT} = E_1 - 2E_2 + E_3 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{11\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ cm}^2$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με $f(f(x)) = x^4, \forall x \in R$. Αν ισχύει ότι $f(1) = 1$, τότε να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τη συνάρτηση f στη σχέση

$$f(f(f(x))) = f(x^4)$$

ή

$$f(f(f(x))) = (f(x))^4 = f^4(x)$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$f^4(x) = f(x^4)$$

Για $x = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f^4(0) &= f(0) \Rightarrow f(0)[f^3(0) - 1] = 0 \\ &\Rightarrow f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = 1 \end{aligned}$$

Αν $f(0) = 1 \Rightarrow f(f(0)) = f(1) \Rightarrow 0^4 = f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

Ξέρουμε όμως ότι $f(1) = 1$, επομένως $f(0) \neq 1$, άρα τελικά έχουμε $f(0) = 0$