ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 24/02/2018 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1 : Δίνεται ένα σύνολο θετικών ακεραίων αριθμών $A_1 = \{\nu, \nu+1, \nu+2\}$, όπου ν είναι περιττός αριθμός με $\nu < 2016$. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια σειρά νέων συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots$ με πλήθος στοιχείων τρία το κάθε ένα , έχοντας σε κάθε βήμα τις εξής δύο επιλογές, ξεκινώντας από το A_1:
1η επιλογή : Για να πάρουμε το A_{i+1} επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο αριθμό και τον προσθέτουμε σε δύο από τα στοιχεία του A_i $i = 1,2,\dots$ και το τρίτο στοιχείο του A_i παραμένει το ίδιο και στο σύνολο A_{i+1} . *(Για παράδειγμα αν επιλέξω $\kappa \in \mathbb{N}$ τότε το σύνολο A_2 μπορεί να είναι* $A_2 = \{\nu+\kappa, \nu+1+\kappa, \nu+2\}$.*)*
2η επιλογή : Για να πάρουμε το A_{i+1} επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο αριθμό και τον προσθέτουμε σε ένα από τα στοιχεία του A_i $i = 1,2,\dots$ και τον αφαιρούμε από ένα άλλο από τα στοιχεία του A_i ενώ το τρίτο στοιχείο του A_i παραμένει το ίδιο και στο σύνολο A_{i+1} . *(Για παράδειγμα αν επιλέξω $\mu \in \mathbb{N}$ τότε το σύνολο A_2 μπορεί να είναι $A_2 = \{\nu+\mu, \nu+1, \nu+2-\mu\}$.)*
Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν με αυτή την διαδικασία σε κάποιο βήμα να έχουμε το σύνολο

$$A_j = \{2016, 2017, 2018\}.$$

Προτεινόμενη λύση

Το άθροισμα των στοιχείων του $A_1 = \{\nu, \nu+1, \nu+2\}$ είναι άρτιος αριθμός, αφού $\nu, \nu+2$ περιττοί και $\nu+1$ άρτιος. Μετά από κάθε βήμα το άθροισμα παραμένει πάντα άρτιος, είτε με την 1η επιλογή (αυξάνεται κατά τον άρτιο 2κ), είτε με τη 2η επιλογή (παραμένει αναλλοίωτο).
Όμως, το άθροισμα $2016 + 2017 + 2018 = 6051$ είναι περιττός. Άρα, με τη διαδικασία του προβλήματος, δεν είναι δυνατόν να φτάσουμε στο σύνολο $A_j = \{2016, 2017, 2018\}$.

Πρόβλημα 2 : Δίνονται τα ψηφία 0,1,2,3,4,5. Να βρείτε το άθροισμα όλων των **άρτιων** τριψηφίων αριθμών που σχηματίζονται από αυτά τα ψηφία αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.

Προτεινόμενη λύση

- Υπάρχουν $3 \cdot 4 = 12$ τέτοιοι τριψήφιοι που αρχίζουν με το 1 (τρεις επιλογές για το τελευταίο ψηφίο και τέσσερις επιλογές για το μεσαίο). Ομοίως, υπάρχουν 12 τριψήφιοι που αρχίζουν με το 3 και 12 που αρχίζουν με το 5.

  Επίσης, υπάρχουν $2 \cdot 4 = 8$ τριψήφιοι που αρχίζουν με το 2 και 8 που αρχίζουν με το 4.

  Άρα, το άθροισμα των ψηφίων των εκατοντάδων όλων αυτών των τριψήφιων είναι:

$$12(1+3+5) + 8(2+4) = \mathbf{156}$$

- Υπάρχουν $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$ τέτοιοι τριψήφιοι που έχουν μεσαίο ψηφίο το 1 (αν το πρώτο ψηφίο είναι άρτιος, έχουμε δύο επιλογές, ενώ αν είναι το πρώτο ψηφίο περιττός, έχουμε τρεις επιλογές). Ομοίως, υπάρχουν 10 τριψήφιοι που έχουν μεσαίο ψηφίο το 3 και 10 που έχουν μεσαίο ψηφίο το 5.
  Επίσης, υπάρχουν $1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$ τέτοιοι τριψήφιοι που έχουν μεσαίο ψηφίο το 2 και 7 ακόμα που έχουν μεσαίο ψηφίο το 4.
  Άρα, το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων όλων αυτών των τριψήφιων είναι:
  $$10(1+3+5)+7(2+4)=\mathbf{132}$$
- Υπάρχουν $4 \cdot 4 = 16$ τέτοιοι τριψήφιοι που λήγουν σε 2 και 16 ακόμα που λήγουν σε 4. Επίσης, υπάρχουν $5 \cdot 4 = 20$ τριψήφιοι που λήγουν σε 0.
  Άρα, το άθροισμα των ψηφίων των μονάδων όλων αυτών των τριψήφιων είναι:
  $$16(2+4)+20\cdot 0=\mathbf{96}$$

  Τέλος, το άθροισμα όλων των τριψήφιων είναι:
  $$\mathbf{96}\cdot 1+\mathbf{132}\cdot 10+\mathbf{156}\cdot 100=\mathbf{17016}$$

<u>Πρόβλημα 3:</u> Έστω $\beta_i, i = 1,2,3,\dots,2018$ θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε
$$\frac{1}{\beta_1^3}+\frac{1}{\beta_2^3}+\cdots+\frac{1}{\beta_{2018}^3}=\frac{1}{2}$$
Να αποδείξετε ότι :

α) Για κάθε ακέραιο $\nu > 0$ ισχύει: $\frac{1}{\nu^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu-1}-\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}\right)$

β) Τουλάχιστον τρείς από τους αριθμούς $\beta_i, i = 1,2,3,\dots,2018$ είναι ίσοι.

<u>Προτεινόμενη λύση</u>

α) Είναι,
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu-1}-\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu(\nu+1)-2(\nu-1)(\nu+1)+\nu(\nu-1)}{\nu(\nu-1)(\nu+1)}=\frac{1}{\nu^3-\nu}>\frac{1}{\nu^3}.$$

β) Προφανώς $\beta_i \neq 1,\ \forall\, i = 1,2,3,\dots,2018.$

Υποθέτουμε ότι στο δεδομένο άθροισμα δεν υπάρχουν περισσότεροι από δύο ίσοι προσθετέοι. Τότε έχουμε ότι:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}=\frac{1}{\beta_1^3}+\frac{1}{\beta_2^3}+\cdots+\frac{1}{\beta_{2018}^3} &\le \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{2018^3}\\ &\le \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{2018^3}\\ &\le \cdots\\ &\le \left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1010^3}+\frac{1}{1010^3}\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{1010^3}\right)\end{aligned}$$

Άρα,
$$\frac{1}{2}\le 2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{1010^3}\right):\ (*)$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα από το α), διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{1}{2^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-1+\frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{1}{3^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{1}{4^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-1}-\frac{2}{4}+\frac{1}{4+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)$$
$$\frac{1}{5^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-1}-\frac{2}{5}+\frac{1}{5+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)$$

.

.

.

$$\frac{1}{1008^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1008-1}-\frac{2}{1008}+\frac{1}{1008+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1007}-\frac{2}{1008}+\frac{1}{1009}\right)$$
$$\frac{1}{1009^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1009-1}-\frac{2}{1009}+\frac{1}{1009+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1008}-\frac{2}{1009}+\frac{1}{1010}\right)$$

$$\frac{1}{1010^3}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1010-1}-\frac{2}{1010}+\frac{1}{1010+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1009}-\frac{2}{1010}+\frac{1}{1011}\right)$$

Προσθέτουμε τις πιο πάνω και έχουμε:

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{1010^3}<\frac{1}{2}\left(1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1010}-\frac{2}{1010}+\frac{1}{1011}\right)\overset{(*)}{\Longrightarrow}$$
$$\frac{1}{2}\leq 2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{1010^3}\right)<\frac{1}{2}-\frac{1}{1010\cdot 1011}$$

Τελικά έχουμε:

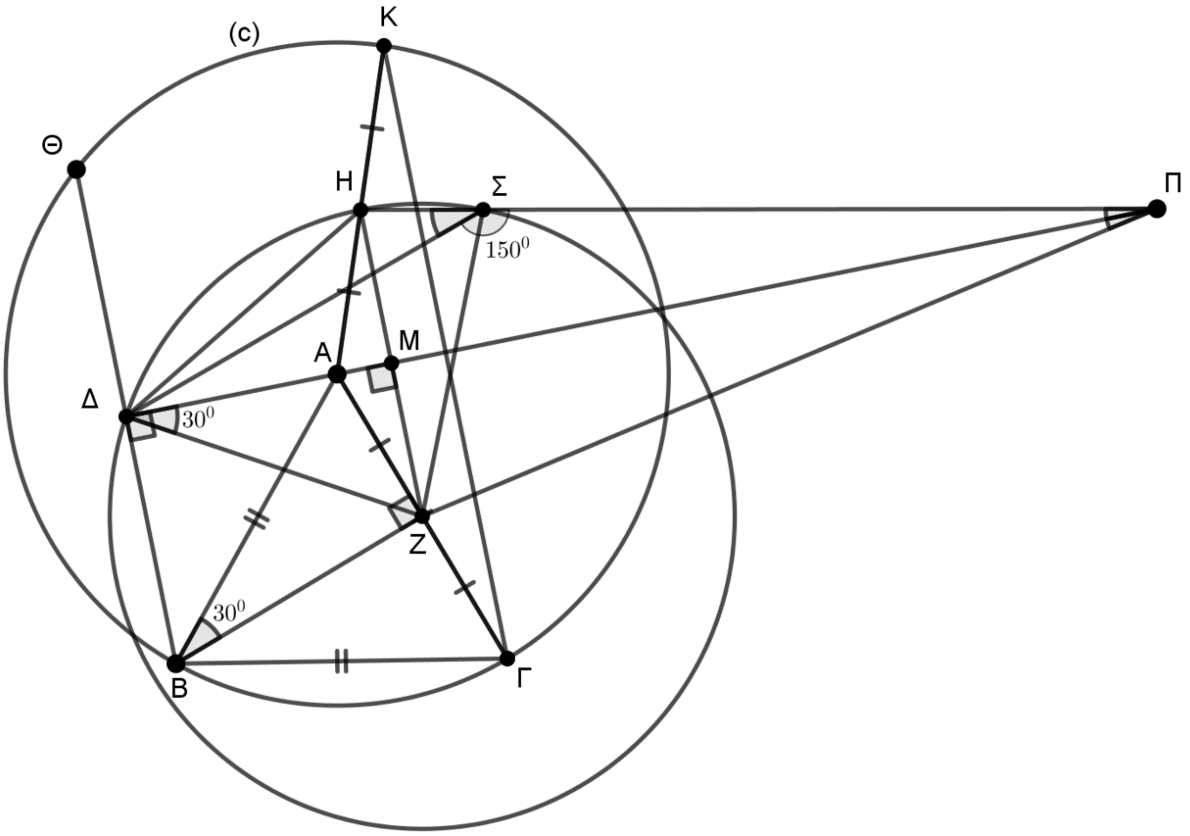
$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{1010\cdot 1011}$$

Άτοπο.

Πρόβλημα4: Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$. Με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε κύκλο (c). Στο μεγαλύτερο από τα δύο τόξα $B\varGamma$ του κύκλου (c) παίρνουμε σημείο $\varTheta$ και φέρουμε τη χορδή $B\varTheta$. Η παράλληλη από το $\varGamma$ προς την $B\varTheta$ τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο K. Έστω $\varDelta, Z, H$ τα μέσα των τμημάτων $B\varTheta, A\varGamma, AK$ αντίστοιχα. Έστω σημείο Π έξω από τον κύκλο και πάνω στην ημιευθεία

ΔA και ένα σημείο Σ μέσα στον κύκλο έτσι ώστε το $\Delta Z \Pi \Sigma$ να είναι κυρτό τετράπλευρο με $\Sigma Z = \Delta Z$ κα $\angle \Delta \Sigma \Pi = 150°$. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τρίγωνο $Z\Delta H$ είναι ισόπλευρο και
(β) $\angle Z\Pi\Delta = \angle \Delta \Pi \Sigma$

<u>Προτεινόμενη λύση</u>



(α) Φέρουμε το BZ, που είναι ύψος και διχοτόμος στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Επειδή το Δ είναι το μέσον της χορδής $B\Theta$ στον (c), έχουμε $A\Delta \perp B\Theta$, οπότε το τετράπλευρο $A\Delta BZ$ είναι εγγράψιμο, απ' όπου $\angle ZBA = \angle Z\Delta A = 30^0$. Είναι $ZH \parallel \Gamma K \parallel B\Theta$, άρα $\Delta AM \perp ZH$ και από το ισοσκελές τρίγωνο HAZ, το M είναι το μέσον του HZ. Έτσι το τρίγωνο $Z\Delta H$ είναι ισοσκελές με $\Delta H = \Delta Z$. Επειδή $\angle \Delta ZM = 60^0$, το τρίγωνο $Z\Delta H$ είναι ισόπλευρο.
(β) Γράφουμε τον κύκλο $(Z, Z\Delta)$ που περνά από τα H, Σ, αφού $Z\Delta = ZH = Z\Sigma$. Τότε έχουμε

$$\angle H\Sigma\Delta = \frac{1}{2}(\angle \Delta ZH) = 30^0$$

οπότε $\angle H\Sigma\Pi = 30^0 + 150^0 = 180^0$, δηλαδή τα σημεία H, Σ, Π είναι συνευθειακά.
Από τα ίσα τρίγωνα $H\Delta\Pi, Z\Delta\Pi$ παίρνουμε άμεσα πως $\angle Z\Pi\Delta = \angle \Delta\Pi H = \angle \Delta\Pi\Sigma$.