



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β' Διαγωνισμός Επιλογής κάτω των 15 1/2 Ετών

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 15/02/2020

Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί a, b, c έτσι, ώστε

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - 10x^2 + 7x + 4$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις παραστάσεις

$$A = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \quad \text{και} \quad B = 100(a^2 + b^2 + c^2)$$

- (i) Να αποδείξετε ότι $a + b + c = 10$.
- (ii) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $ab + bc + ca$ και abc .
- (iii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A και $\frac{1}{B}$.

Πρόβλημα 2. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n , το κλάσμα

$$\frac{n^3(n^6 - 1)}{504}$$

είναι ακέραιος αριθμός.

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και σημείο A εξωτερικό του κύκλου. Φέρουμε ευθεία (δ) κάθετη στην ευθεία OA στο σημείο A . Από το σημείο A φέρουμε μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, έστω B και Γ έτσι, ώστε το σημείο B να είναι μεταξύ των σημείων A και Γ . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία B, Γ , τέμνουν την ευθεία (δ) στα σημεία P, Σ αντίστοιχα.

- (α) Να αποδείξετε ότι $AP = A\Sigma$.
- (β) Αν η δεύτερη εφαπτομένη του κύκλου από το σημείο P τέμνει την ευθεία $\Sigma\Gamma$ στο σημείο M , να αποδείξετε ότι η ευθεία AO περνά από το M και διχοτομεί τη γωνία $\angle \Sigma MP$.

Πρόβλημα 4. Έστω Ω το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 26\}$. Υποθέτουμε ότι το A είναι υποσύνολο του Ω τέτοιο, ώστε να έχει την εξής ιδιότητα:

«Δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία του A που η διαφορά τους να είναι ίση με τέλειο τετράγωνο.»

Να βρείτε το μέγιστο δυνατό πλήθος των στοιχείων του υποσυνόλου A .