ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 15/02/2020 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **<u>όλα</u>** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>Πρόβλημα 1</u> : Δίνονται πραγματικοί αριθμοί a, b, c έτσι ώστε

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 10x^2 + 7x + 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και οι παραστάσεις

$$A = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \qquad \text{και} \qquad B = 100(a^2 + b^2 + c^2)$$

i. Να αποδείξετε ότι $a + b + c = 10$

ii. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $ab + bc + ca$ και abc.

iii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A και $\frac{1}{B}$.

<u>Προτεινόμενη λύση</u>

Μετά τις πράξεις, έχω

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - 10x^2 + 7x + 4$$

απ' όπου παίρνουμε

i. $a + b + c = 10$

ii. $ab + bc + ca = 7$ και $abc = -4$

iii.

$$A = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = \frac{(b+2)(c+2) + (c+2)(a+2) + (a+2)(b+2)}{(a+2)(b+2)(c+2)}$$

$$= \cdots = \frac{(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 12}{abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8}$$

$$= \frac{7 + 40 + 12}{-4 + 14 + 40 + 8} = \frac{59}{58}$$

Επίσης, $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 100 - 14 = 86$ και έτσι

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{100\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} = \frac{1}{8600} < \frac{59}{58} = A$$

Πρόβλημα 2 : Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n το κλάσμα

$$\frac{n^3(n^6-1)}{504}$$

είναι ακέραιος αριθμός.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$

Θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ο $n^3(n^6-1)$ είναι διαιρετός με $7, 8, 9$ και, αφού είναι ανά δυο σχετικά πρώτοι, τότε $\frac{n^3(n^6-1)}{504} \in \mathbb{Z}$

- Αν $n = 2k\ ,\ k \in \mathbb{N}$ τότε
  $n^3(n^6-1) = 8k^3(64k^6-1) \Rightarrow 8\ /\ n^3(n^6-1)$

  Αν $n = 2k+1\ ,\ k \in \mathbb{N}$ (n περιττός) τότε και ο n^3 είναι περιττός.

  $n^6 - 1 = (n^3-1)(n^3+1)$ είναι γινόμενο δυο διαδοχικών άρτιων, που σημαίνει ότι ο ένας από αυτούς διαιρείται με το 4 και ο άλλος είναι άρτιος, άρα και πάλι $8\ /\ n^3(n^6-1)$.
  Συνεπώς σε κάθε περίπτωση $\boldsymbol{8\ /\ n^3\left(n^6-1\right)}$ **: (1)**

- Αν $n = 3k\ ,\ k \in \mathbb{N}$ τότε
  $n^3(n^6-1) = 27k^3((3k)^6-1) \Rightarrow 9\ /\ n^3(n^6-1)$

  Αν $3 \nmid n$ τότε $n = 3\lambda + 1$ ή $n = 3\lambda - 1$ με $\lambda \in \mathbb{N}$ οπότε έχουμε αντίστοιχα

  $$n^3 - 1 = (3\lambda+1\,)^3 - 1 = 27\lambda^3 + 27\lambda^2 + 9\lambda \Rightarrow 9\ /\ n^3 - 1$$
  $$n^3 + 1 = (3\lambda-1\,)^3 + 1 = 27\lambda^3 - 27\lambda^2 + 9\lambda \Rightarrow 9/n^3 + 1$$

  Άρα $9\ /\ n^3(n^6-1)$
  Συνεπώς σε κάθε περίπτωση $\boldsymbol{9\ /\ n^3\left(n^6-1\right)}$ **: (2)**

- Έχουμε

  $$\begin{aligned} n^3(n^6-1) &= n^3(n^3-1)(n^3+1) = n^3(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1) \\ &= n^3(n-1)[(n+3)(n-2)+7](n+1)[(n-3)(n+2)+7] \\ &= n^2\underbrace{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}_{7\ \text{διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί}} + 7A \end{aligned}$$

  Συνεπώς σε κάθε περίπτωση $\boldsymbol{7\ /\ n^3\left(n^6-1\right)}$ **: (3)**

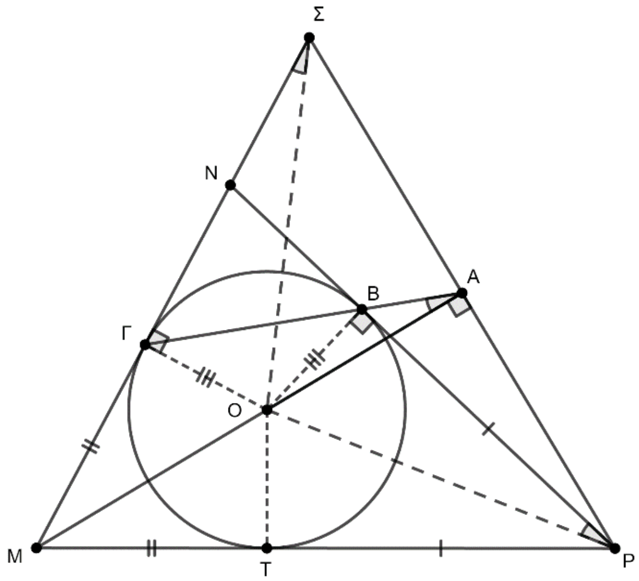
Από τις (1), (2), (3) προκύπτει το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3: Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και σημείο A εξωτερικό του κύκλου. Φέρουμε ευθεία (δ) κάθετη στην ευθεία OA στο σημείο A. Από το σημείο A φέρουμε μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, έστω B και Γ έτσι ώστε το σημείο B να είναι μεταξύ των σημείων A και Γ. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία B, Γ τέμνουν την ευθεία (δ) στα σημεία P, Σ αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι $AP = A\Sigma$

(β) Αν η δεύτερη εφαπτομένη του κύκλου από το σημείο P τέμνει την ευθεία $\Sigma\Gamma$ στο σημείο M, να αποδείξετε ότι η ευθεία AO περνά από το M και διχοτομεί την γωνία $\angle \Sigma M P$.

Προτεινόμενη λύση



Έστω N το σημείο τομής των εφαπτομένων στα B, Γ και M το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Γ και της δεύτερης εφαπτομένης από το P. Φέρουμε τις ακτίνες στα σημεία επαφής B, Γ και T, καθώς και τα $O\Sigma, OP$.

(α) Το $ABOP$ είναι εγγράψιμο, αφού $\angle OBP = \angle OAP = 90^0$. Άρα $\angle OPB = \angle OAB$: (1)

Το $\Gamma OA\Sigma$ είναι εγγράψιμο, αφού $\angle O\Gamma\Sigma + \angle OA\Sigma = 180^0$.

Άρα $\angle OA\Gamma = \angle OAB = \angle O\Sigma\Gamma$: (2). Από (1) και (2) έχουμε $\angle OPB = \angle O\Sigma\Gamma$

Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta OBP, \Delta O\Gamma\Sigma$ είναι ίσα, απ' όπου $O\Sigma = OP$. Δηλαδή το $\Delta\Sigma OP$ είναι ισοσκελές και OA διάμεσος, ως ύψος. Άρα $AP = A\Sigma$

(β) Από την ισότητα των πιο πάνω τριγώνων έχουμε επίσης $\Sigma\Gamma = PB = PT$ και τότε $M\Sigma = MP$, που σημαίνει ότι το M είναι σημείο της μεσοκαθέτου OA του ΣP και άρα τα σημεία A, O, M είναι συνευθειακά. Τέλος, το O είναι το έγκεντρο του ΔNMP κα έτσι η ευθεία MOA είναι διχοτόμος της $\angle \Sigma M P$.

<u>Πρόβλημα 4:</u> Έστω Ω το σύνολο $\Omega = \{1,2,3,\ldots,26\}$. Υποθέτουμε ότι το A είναι υποσύνολο του Ω τέτοιο ώστε να έχει την εξής ιδιότητα:
«δεν υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία του A που η διαφορά τους να είναι ίση με τέλειο τετράγωνο»
Να βρείτε το μέγιστο δυνατό πλήθος των στοιχείων του υποσυνόλου A.

<u>Προτεινόμενη λύση</u>

Για κάθε δύο συνεχόμενους αριθμούς του Ω μόνον ο ένας μπορεί να ανήκει στο A, αφού έχουν διαφορά $1 = 1^2$.
Για κάθε 5 συνεχόμενους αριθμούς του Ω, έστω τους $n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$, το πολύ δύο ανήκουν στο A. Πράγματι, από την προηγούμενη παρατήρηση, αν είχαμε τρείς αριθμούς στο A, θα έπρεπε να ήταν οι $n+1, n+3, n+5$, που είναι άτοπο, αφού
$(n+5)-(n+1) = 4 = 2^2$.
Σίγουρα, από του 1, 26 ο ένας δεν ανήκει στο A, έστω $26 \notin A$
Στην κάθε μια από τις πεντάδες $\{1,2,3,4,5\}, \{6,7,8,9,10\}, \ldots, \{21,22,23,24,25\}$ έχουμε το πολύ δύο στοιχεία στο A. Άρα $|A| \leq 10$ και συνεπώς το μέγιστο δυνατό πλήθος των στοιχείων του υποσυνόλου A είναι 10.
Μπορούμε να έχουμε $|A| = 10$, παίρνοντας $A = \{1,3,6,8,11,13,16,18,21,23\}$