ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 15/02/2020 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Να βρείτε όλες τις τριάδες πρώτων αριθμών (p,q,r) τέτοιες ώστε οι αριθμοί

$$a=\frac{p^2+2q}{q+r},\quad b=\frac{q^2+9r}{r+p},\quad c=\frac{r^2+3p}{p+q}$$

να είναι όλοι ακέραιοι αριθμοί.

Προτεινόμενη λύση:

Έστω $p\neq 2$ τότε ο p αφού είναι πρώτος αριθμός θα είναι περιττός.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- Αν $r=2$ τότε $c=\frac{4+3p}{p+q}$ και αφού $4+3p$ περιττός αριθμός θα έχουμε ότι και $p+q$ περιττός. Όμως αφού p,q πρώτοι και $p\neq 2$ για να έχουμε το άθροισμα $p+q$ περιττό θα πρέπει $q=2$.

  Επομένως

  $$c=\frac{4+3p}{p+q}=\frac{3p+4}{p+2}=3-\frac{2}{p+2}$$

  που δεν είναι ακέραιος αριθμός.

- Αν $r\neq 2$ τότε θα πρέπει το r να είναι περιττός αριθμός. Τότε αφού $p\neq 2$ θα πρέπει $r+p$ άρτιος και ο αριθμός

  $$b=\frac{q^2+9r}{r+p}$$

  είναι ακέραιος, θα πρέπει q^2+9r να είναι άρτιος αριθμός. Άρα θα πρέπει ο q να είναι περιττός αριθμός. Τότε όμως στο κλάσμα $a=\frac{p^2+2q}{q+r}$, ο αριθμητής p^2+2q θα είναι περιττός αριθμός και ο παρονομαστής $q+r$ άρτιος αριθμός, το οποίο είναι άτοπο.

  Επομένως $p=2$.

Για το r διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω $r=2$. Τότε θα έχουμε

  $$b=\frac{q^2+18}{4}$$

Άρα ο q^2+18 άρτιος αριθμός και αφού q πρώτος, θα έχουμε $q=2$. Τότε $b=\frac{11}{2}$ που δεν είναι ακέραιος αριθμός.

- Επομένως $r>2$. Τότε θα έχουμε
$$a=\frac{4+2q}{q+r}<\frac{4+2q}{q+2}=\frac{2(2+q)}{q+2}=2$$

Δηλαδή,
$$\frac{4+2q}{q+r}=1 \Rightarrow 4+2q=q+r \Rightarrow r=q+4$$
Τότε
$$c=\frac{r^2+3p}{p+q}=\frac{(q+4)^2+6}{2+q}=\frac{q^2+8q+22}{q+2}=q+6+\frac{10}{q+2}$$
Επομένως θα πρέπει $q+2/10$. Η μόνη περίπτωση είναι $q=3$ και $r=7$.
Για $(p,q,r)=(2,3,7)$ θα πάρουμε $\alpha=1, b=8, c=11$.
Άρα η μόνη τριάδα λύσεων θα είναι $(p,q,r)=(2,3,7)$.

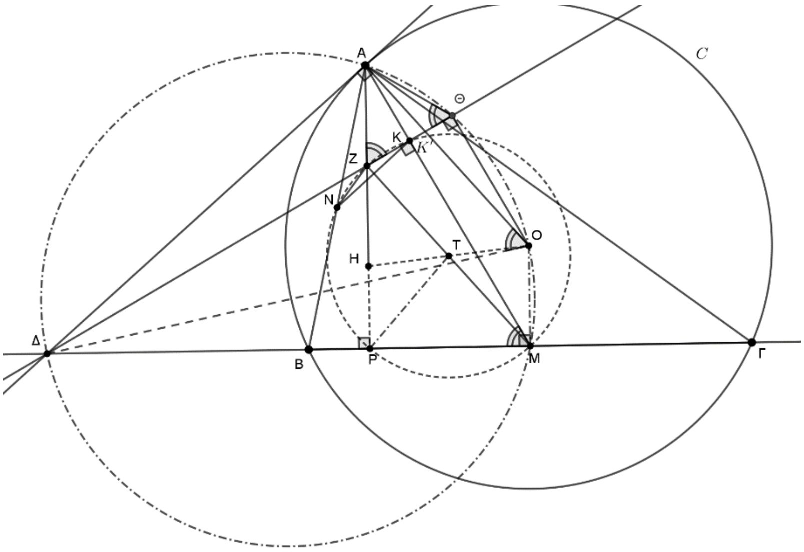
<u>Πρόβλημα 2</u> : Έστω $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει
$$2020f(n)+f(2020-n)=(2020^2-1)(n+1) \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{Z}$$

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>
Για $n=2020-m$ θα πάρουμε
$$2020f(2020-m)+f(m)=(2020^2-1)(2021-m) \quad (1)$$
Ισχύει επίσης
$$2020f(m)+f(2020-m)=(2020^2-1)(m+1)$$
και άρα
$$2020^2f(m)+2020f(2020-m)=2020(2020^2-1)(m+1) \quad (2)$$
Αφαιρώντας την (1) από την (2) παίρνουμε
$$(2020^2-1)f(m)=(2020^2-1)[2020(m+1)-(2021-m)]$$
$$=(2020^2-1)(2021m-1)$$
Επομένως, $f(m)=2021m-1$ για κάθε ακέραιο m.

<u>Πρόβλημα 3</u> : Δίνεται τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ με $A\Gamma>B\Gamma>AB$ και H το ορθόκεντρό του. Έστω (C) ο περιγεγραμμένος κύκλος του $\varDelta AB\Gamma$ και O το περίκεντρο του. Η εφαπτομένη του (C) στο A τέμνει την $B\Gamma$ στο $\varDelta$. Ονομάζουμε Z το μέσο του AH. Η κάθετη από το O στην ευθεία $\varDelta Z$ τέμνει την ευθεία $\varDelta Z$ στο σημείο Θ. Έστω M,N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Αν K είναι το μέσο του $Z\Theta$, να αποδείξετε ότι $\angle ZNK=\angle ZMK$.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>
Ξέρουμε ότι
$$OM =\parallel \frac{AH}{2}$$
Άρα το τετράπλευρο $AOMZ$ είναι παραλληλόγραμμο. Τώρα έχουμε
$$AZ\perp B\Gamma$$
$$A\varDelta \perp AO \parallel ZM$$

Επομένως, $ZM \perp A\Delta$. Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι το σημείο Z είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\Delta A\Delta M$. Άρα $\Delta Z \perp AM$ και έστω K' το σημείο τομής τους. Τότε $\angle ZK'M = 90°$.



Έχουμε

$$OM =\parallel \frac{AH}{2} = ZH$$

τότε το τετράπλευρο $ZHMO$ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως οι διαγώνιοι διχοτομούνται και ας ονομάσουμε T το σημείο τομής τους. Όμως το T είναι ακόμη το μέσο της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta ZK'M$.

Αν η AH τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο P. Επειδή $\angle K = \angle P = 90°$ τα σημεία Z, K', M, P είναι ομοκυκλικά. Επομένως το σημείο K' ανήκει στον κύκλο του $Euler$ του τριγώνου $\Delta AB\Gamma$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σημείο K' είναι το μέσον του $Z\Theta$ ή αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο $\Delta AZ\Theta$ είναι ισοσκελές και τότε αφού $AK' \perp Z\Theta$ το σημείο K' θα είναι το μέσον του $Z\Theta$.

Έχουμε ότι το τετράπλευρο $\Delta A\Theta O$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (C_2). Επομένως

$$\angle A\Theta Z = \angle A\Theta\Delta = \angle AO\Delta$$

Όμως $\angle AO\Delta = \angle AM\Delta$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο $A\Delta$ του (C_2)).

Αφού το τετράπλευρο $ZK'MP$ είναι εγγράψιμο έχουμε

$$\angle AMP = \angle AM\Delta = \angle AZK'$$

Άρα το τρίγωνο $\Delta AZ\Theta$ είναι ισοσκελές και επομένως τα σημεία K και K' ταυτίζονται.

Επομένως από το εγγράψιμο τετράπλευρο $KZNM$ θα έχουμε

$$\angle ZNK = \angle ZMK$$

<u>Πρόβλημα 4</u> : Έστω Ω το σύνολο $\Omega = \{1,2,3,\dots,2020\}$. Υποθέτουμε ότι το A είναι υποσύνολο του Ω τέτοιο ώστε να έχει την εξής ιδιότητα:

«Αν x, y, z είναι διαφορετικά στοιχεία του A, τότε το $2x$ **δεν** διαιρεί το $y - z$.»
Να βρείτε το μέγιστο δυνατό πλήθος των στοιχείων του υποσυνόλου A.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

Έστω m το ελάχιστο στοιχείο του A.Τα υπόλοιπα στοιχεία του A αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα $mod 2m$, άρα $|A| \leq 2m + 1$.
Επίσης, αφού $A \subseteq \{m, m+1, \ldots, 2020\}$, τότε $|A| \leq 2021 - m$.
Άρα,

$$3|A| \leq (2m + 1) + 2(2021 - m) = 4043$$

που δίνει

$$|A| \leq \left\lfloor \frac{4043}{3} \right\rfloor = 1347$$

Για $A = \{674, \ldots, 2020\}$ έχουμε $|A| = 1347$. Επίσης το σύνολο A ικανοποιεί τις συνθήκες αφού αν $x, y, z \in A$ τότε $2x \geq 2 \cdot 674 = 1348$ ενώ αν $y, z \in A$ τότε

$$|y - z| \leq 2020 - 674 = 1346$$

Άρα, $2x > y - z$. Επομένως το σύνολο A ικανοποιεί τις δεδομένες συνθήκες.