



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β' Διαγωνισμός Επιλογής Λυκείου

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 15/02/2020 Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλες τις τριάδες πρώτων αριθμών (p, q, r) τέτοιες, ώστε οι αριθμοί

$$a = \frac{p^2 + 2q}{q + r}, \quad b = \frac{q^2 + 9r}{r + p}, \quad c = \frac{r^2 + 3p}{p + q}$$

να είναι όλοι ακέραιοι αριθμοί.

Πρόβλημα 2. Έστω \mathbb{Z} το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει

$$2020f(n) + f(2020 - n) = (2020^2 - 1)(n + 1)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Πρόβλημα 3. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AG > B\Gamma > AB$ με H το ορθόκεντρό του. Έστω (C) ο περιγεγραμμένος κύκλος του $AB\Gamma$ και O το περίκεντρό του. Η εφαπτομένη του (C) στο A τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Ονομάζουμε Z το μέσο του AH . Η κάθετη από το O στην ΔZ τέμνει τη ΔZ στο σημείο Θ . Έστω M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Αν K είναι το μέσο της $Z\Theta$, να αποδείξετε ότι $\angle ZNK = \angle ZMK$.

Πρόβλημα 4. Έστω Ω το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$. Υποθέτουμε ότι το A είναι υποσύνολο του Ω τέτοιο, ώστε να έχει την εξής ιδιότητα:

«Αν τα x, y, z είναι διαφορετικά στοιχεία του A , τότε το $2x$ δεν διαιρεί το $y - z$.»

Να βρείτε το μέγιστο δυνατό πλήθος των στοιχείων του υποσυνόλου A .