ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 24/02/2018 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$ και για $\nu \geq 3$ ισχύει

$$\alpha_\nu = max\{a_\rho + \alpha_{\nu-\rho} \ : 1 \leq \rho \leq \nu - 1\}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) ο γενικός όρος της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_\nu = \begin{cases} 3k & \gamma\iota\alpha \ \ \nu = 2k \\ 3k+1 & \gamma\iota\alpha \ \nu = 2k+1 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

β) $\alpha_{\nu+\mu} = \alpha_\nu + \alpha_\mu$ αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους δείκτες ν, μ είναι άρτιος.

Προτεινόμενη λύση:

α) Επαγωγικά θα έχουμε

- Για $k = 1$ θα έχουμε ότι: Αν $\nu = 2$ τότε από την υπόθεση παίρνουμε $\alpha_2 = 3 \cdot 1 = 3$ και αν $\nu = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ θα πάρουμε

  $$\alpha_3 = max\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1\} = 1 + 3 = 4 = 3 \cdot 1 + 1$$

  Επομένως

  $$\alpha_2 = \begin{cases} 3 & \gamma\iota\alpha \ \ \nu = 2 \\ 4 & \gamma\iota\alpha \ \ \nu = 3 \end{cases}$$

  ισχύει για $k = 1$

- Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k = m \in \mathbb{N}$, δηλαδή ισχύει

  $$\alpha_\nu = \begin{cases} 3m & \gamma\iota\alpha \ \ \nu = 2m \\ 3m+1 & \gamma\iota\alpha \ \nu = 2m+1 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

  και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = m + 1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι

  $$\alpha_\nu = \begin{cases} 3(m+1) & \gamma\iota\alpha \ \ \nu = 2(m+1) = 2m+2 \\ 3(m+1)+1 & \gamma\iota\alpha \ \nu = 2(m+1)+1 = 2m+3 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

  Για $\nu = 2(m+1) = 2m+2$ θα έχουμε δύο επιλογές ή το $2m+2$ θα είναι άθροισμα δύο θετικών άρτιων αριθμών ή άθροισμα δυο θετικών περιττών αριθμών.

  - Υποθέτουμε ότι $2m + 2 = 2\lambda + 2\mu$ ή $m + 1 = \lambda + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$. Τότε θα έχουμε από την υπόθεση της επαγωγής

    $$\alpha_{2\lambda} + \alpha_{2\mu} = 3\lambda + 3\mu = 3(\lambda + \mu) = 3(m + 1)$$

  - Υποθέτουμε ότι $2m + 2 = (2\kappa + 1) + (2\omega + 1)$ ή $m = \kappa + \omega$, $\kappa, \omega \in \mathbb{N}$. Τότε θα έχουμε από την υπόθεση της επαγωγής

    $$\alpha_{2\kappa+1} + \alpha_{2\omega+1} = (3\kappa + 1) + (3\omega + 1) = 3(\kappa + \omega) + 2 < 3(\kappa + \omega + 1) = 3(m + 1)$$

Επομένως, $\alpha_{2m+2} = 3(m+1)$.

Για $\nu = 2m+3$ θα έχουμε ότι ο αριθμός αυτός θα είναι άθροισμα ενός θετικού άρτιου αριθμού και ενός περιττού θετικού αριθμού.

- Υποθέτουμε ότι $2m+3 = 2\pi + (2\tau+1)$ ή $2m+2+1 = 2(\pi+\tau)+1$ ή $m+1 = \pi+\tau,\ \pi,\tau \in \mathbb{N}$. Τότε θα έχουμε από την υπόθεση της επαγωγής

$$\alpha_{2\pi} + \alpha_{2\tau+1} = 3\pi + 3\tau + 1 = 3(\pi+\tau)+1 = 3(m+1)+1.$$

Επομένως, $\alpha_{2m+3} = 3(m+1)+1$. Και έτσι τεκμηριώνετε η επαγωγική υπόθεση.

β) Ελέγχοντας όλες τις περιπτώσεις θα έχουμε

- Για δείκτες ν,μ άρτιους δηλαδή $\nu = 2\beta\ \ \kappa\alpha\iota\, \nu = 2\gamma$ παίρνουμε

$$\alpha_{\nu+\mu} = \alpha_{2\beta+2\gamma} = \alpha_{2(\beta+\gamma)} = 3(\beta+\gamma) = 3\beta+3\gamma = \alpha_{2\beta}+\alpha_{2\gamma} = \alpha_\nu + \alpha_\mu$$

- Για δείκτες ν,μ ένα άρτιο και ένα περιττό δηλαδή $\nu = 2\varepsilon\ \ \kappa\alpha\iota\, \nu = 2\zeta+1$ παίρνουμε

$$\alpha_{\nu+\mu} = \alpha_{2\varepsilon+2\zeta+1} = \alpha_{2(\varepsilon+\zeta)+1} = 3(\varepsilon+\zeta)+1 = 3\varepsilon + (3\zeta+1)$$
$$= \alpha_{2\varepsilon} + \alpha_{2\zeta+1} = \alpha_\nu + \alpha_\mu$$

- Για δείκτες ν,μ περιττούς δηλαδή $\nu = 2\theta+1\ \ \kappa\alpha\iota\, \nu = 2\eta+1$ παίρνουμε

$$\alpha_{\nu+\mu} = \alpha_{2\theta+1+2\eta+1} = \alpha_{2(\theta+\eta+1)} = 3(\theta+\eta+1)$$

και

$$\alpha_\nu + \alpha_\mu = \alpha_{2\theta+1} + \alpha_{2\eta+1} = 3\theta+1+3\eta+1 = 3(\theta+\eta)+2$$

Επομένως, $\alpha_{\nu+\mu} \neq \alpha_\nu + \alpha_\mu$.

<u>Πρόβλημα 2</u> : Δίνεται ένας φυσικός αριθμός n. Να αποδείξετε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός m ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του n και έχει ακριβώς n θετικούς διαιρέτες.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

Έστω ότι ο φυσικός αριθμός n γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών

$$n = \rho_1^{r_1} \cdot \rho_2^{r_2} \cdots \rho_k^{r_k}, \qquad r_i \geq 0\,, i = 1,2,\dots,k$$

Θέτουμε,

$$m = \rho_1^{\rho_1^{r_1}-1} \cdot \rho_2^{\rho_2^{r_2}-1} \cdots \rho_k^{\rho_k^{r_k}-1}, \qquad r_i \geq 0\,, i = 1,2,\dots,k$$

Τότε ο m θα έχει ακριβώς

$$\tau(m) = \left(\left(\rho_1^{r_1}-1\right)+1\right)\left(\left(\rho_2^{r_2}-1\right)+1\right)\cdots\left(\left(\rho_k^{r_k}-1\right)+1\right) = \rho_1^{r_1}\cdot\rho_2^{r_2}\cdots\rho_k^{r_k} = n$$

θετικούς διαιρέτες.

Θα πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι ο m είναι πράγματι πολλαπλάσιο του n.

Για κάθε $i = 1,2,\dots,k$ έχουμε

$$\rho_i^{r_i} - 1 \geq 2^{r_i} - 1 \quad (1)$$

Όμως από την ανισότητα του Bernoulli

(<u>Ανισότητα Bernoulli:</u> Αν $\nu \in \mathbb{N}$ και $x > -1$ τότε, $(1+x)^\nu \geq 1+\nu x$)

η (1) γίνεται

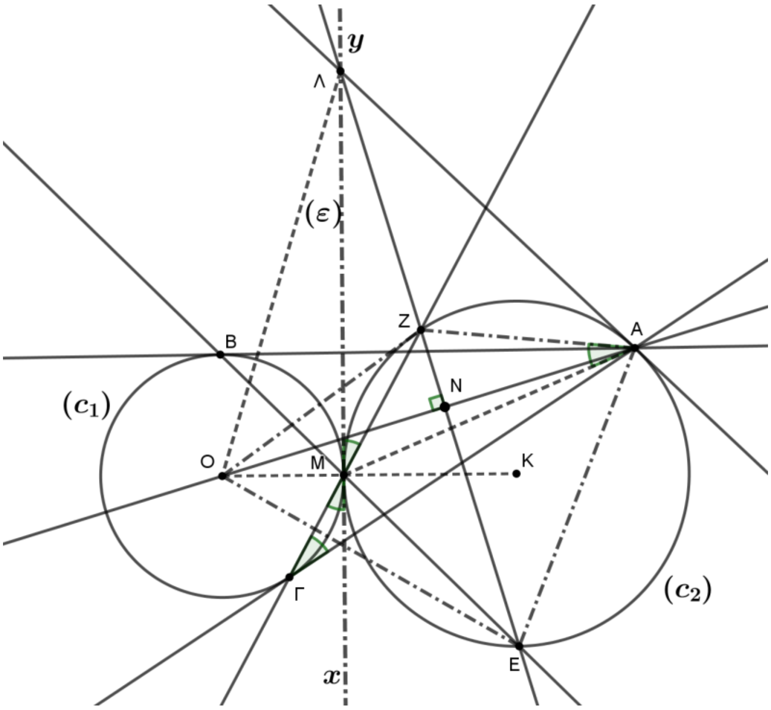
$$\rho_i^{r_i} - 1 \geq 2^{r_i} - 1 = (1+1)^{r_i} - 1 \geq (1+r_i) - 1 = r_i, \forall\, i = 1,2,\dots,k$$

Επομένως ο m είναι πράγματι πολλαπλάσιο του n.

<u>Πρόβλημα 3</u> : Δίνονται δύο κύκλοι $c_1(O,R_1)$ και $c_2(K,R_2)$ με $R_2 > R_1$ οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Από ένα σημείο A του κύκλου c_2 που δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία OK φέρουμε τις εφαπτόμενες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ προς τον κύκλο c_1 και έστω

B, Γ τα αντίστοιχα σημεία επαφής τους με τον c_1. Οι ευθείες $MB, M\Gamma$ τέμνουν τον κύκλο c_2 ξανά στα σημεία E, Z αντίστοιχα. Έστω Λ το σημείο τομής της ευθείας EZ και της εφαπτομένης του κύκλου c_2 στο σημείο A. Να αποδείξετε ότι $\Lambda M \perp OK$.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>



Έστω (ε) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων. Τότε

$$\angle Z\Gamma A = \angle \Gamma M x = \angle ZMy.$$

Και από γωνία χορδής εφαπτομένης θα έχουμε

$$\angle ZMy = \angle ZAM$$

και επομένως $\angle Z\Gamma A = \angle ZAM$. Τότε τα τρίγωνα $\Delta\ MZA, \Delta AZ\Gamma$ είναι όμοια. Άρα

$$\Delta\ MZA \approx\ \Delta AZ\Gamma \Longrightarrow \frac{MZ}{ZA} = \frac{AZ}{Z\Gamma} \Longrightarrow ZA^2 = MZ \cdot \Gamma Z$$

Αλλά

$$MZ \cdot \Gamma Z = P_Z(O) = ZO^2 - R_1^2$$

Επομένως από τα προηγούμενα

$$ZA^2 = ZO^2 - R_1^2 \Longrightarrow R_1^2 = ZO^2 - ZA^2 \qquad (1)$$

Ανάλογα έχουμε

$$EM \cdot EB = P_E(O) = EO^2 - R_1^2 \Longrightarrow R_1^2 = EO^2 - EA^2 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$ZO^2 - ZA^2 = EO^2 - EA^2$$

Επομένως θα έχουμε ότι $ZE \perp OA$ (θεώρημα Carnot). Και αφού Λ ανήκει πάνω στην ευθεία EZ θα έχουμε

$$\Lambda O^2 - \Lambda A^2 = R_1^2 \Longrightarrow \Lambda O^2 - R_1^2 = \Lambda A^2 \qquad (3)$$

Αφού η ΛA είναι εφαπτομένη στον κύκλο (κ) θα έχουμε

$$\Lambda A^2 = \Lambda K^2 - R_2^2 \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) παίρνουμε

$$\Lambda O^2 - R_1^2 = \Lambda K^2 - R_2^2 \Longrightarrow P_\Lambda(O) = P_\Lambda(K)$$

Επομένως το Λ ανήκει πάνω στον ριζικό άξονα των δύο κύκλων και άρα $\Lambda M \perp OK$.

Πρόβλημα 4 **:** Δίνονται 2018 σύνολα. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 64 από αυτά, έστω $A_1, A_2, \dots, A_{64}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$A_i \cup A_j \neq A_k \text{ για κάθε } i, j, k \in \{1,2, \dots, 64\} \; \mu\varepsilon \; i \neq j, i \neq k, \; j \neq k$$

«Δηλαδή η ένωση κάθε δύο από αυτά τα 64 σύνολα, είναι ένα σύνολο διαφορετικό από κάθε άλλο από αυτά τα 64 σύνολα.»

Προτεινόμενη λύση:

Επιλέγουμε ως A_1, το σύνολο με το μικρότερο δυνατό μέγεθος. (Αν υπάρχουν πολλά τέτοια σύνολα, τότε κάνουμε την επιλογή αυθαίρετα.)

Αν $t \leq 63$ και έχουμε ήδη επιλέξει τα $A_1, \dots, A_t$, τότε επιλέγουμε ως A_{t+1} το σύνολο με το μικρότερο δυνατό μέγεθος το οποίο είναι διαφορετικό των $A_1, \dots, A_t$ καθώς και των ενώσεων αυτών των συνόλων ανά δύο.

Αυτό μπορούμε να το κάνουμε αφού απαγορεύονται το πολύ

$$\binom{t}{2} + t = \frac{t(t-1)}{2} + t = \frac{t(t+1)}{2} \leq \frac{63 \cdot 64}{2} = 63 \cdot 32 = 2016$$

σύνολα να επιλεγούν.

Επίσης, με την επιλογή αυτή εξακολουθεί να ικανοποιείται η συνθήκη. Πράγματι το $A_i \cup A_j \neq A_k$ για $i, j, k \leq t$ $(i \neq j \neq k, \; i \neq k)$ ισχύει από προηγουμένως. Το $A_i \cup A_j \neq A_{k+1}$ ισχύει από την επιλογή του A_{k+1}. Το $A_i \cup A_{k+1} \neq A_j$ επίσης ισχύει διότι πάλι από την επιλογή των $A_1, \dots, A_{k+1}$ έχουμε

$$|A_1| \leq |A_2| \leq \cdots \leq |A_k| \leq |A_{k+1}|.$$

Οπότε αν είχαμε $A_i \cup A_{k+1} = A_j$, θα είχαμε $A_j = A_{k+1}$, άτοπο από την επιλογή του A_{k+1}.

Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να επιλέξουμε τουλάχιστον 64 σύνολα όπως είναι το ζητούμενο.