ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 10/02/2019 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Ορίζουμε τις ακολουθίες $(\alpha_\nu), (\beta_\nu), (\gamma_\nu)$ με $\nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ως εξής:

- $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = 2^{\alpha_\nu}$, $\forall \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\beta_1 = 3$ και $\beta_{\nu+1} = 3^{\beta_\nu}$, $\forall \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\gamma_1 = 4$ και $\gamma_{\nu+1} = 4^{\gamma_\nu}$, $\forall \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Να αποδείξετε ότι $\beta_{2019} > \alpha_{2020} > \gamma_{2018}$

Προτεινόμενη λύση:

Θα αποδείξουμε ότι

$$\beta_{\nu+1} > \alpha_{\nu+2} \geq 4\gamma_\nu, \text{ για κάθε } \nu \geq 2$$

Έχουμε,

$$\beta_2 = 3^{\beta_1} = 3^3 = 27 \quad \text{και} \quad \alpha_3 = 2^{\alpha_2}.$$

Όμως $\alpha_2 = 2^{\alpha_1} = 2^2 = 4$. Επομένως, $\alpha_3 = 2^4 = 16$. Επομένως $\beta_2 > \alpha_3$. Επίσης αν $\beta_\kappa > \alpha_{\kappa+1}$ τότε

$$\beta_{\kappa+1} = 3^{\beta_\kappa} > 2^{\beta_\kappa} > 2^{\alpha_{\kappa+1}} = \alpha_{\kappa+2}$$

Άρα, επαγωγικά έχουμε

$$\beta_\nu > \alpha_{\nu+1} \qquad \forall\, \nu \geq 2$$

Έχουμε, $\alpha_3 = 2^4 = 16$ και $\gamma_1 = 4$. Άρα,

$$\alpha_3 \geq 4\gamma_1$$

Επίσης, αν $\alpha_{\kappa+2} \geq 4\gamma_\kappa$ τότε

$$4\gamma_{\kappa+1} = 4 \cdot 4^{\gamma_\kappa} = 2^{2\gamma_\kappa+2} < 2^{4\gamma_\kappa} \leq 2^{\alpha_{\kappa+2}} = \alpha_{\kappa+3}$$

Επομένως επαγωγικά

$$\alpha_{\nu+2} \geq 4\gamma_\nu \qquad \forall \nu \geq 1.$$

Άρα, για $\nu = 2019$ έχουμε

$$\beta_{2019} > \alpha_{2020} = \alpha_{2018+2} \geq 4\gamma_{2018} > \gamma_{2018}$$

<u>Πρόβλημα 2</u> : Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p, ώστε ο αριθμός

$$1^{p^3+p+1}+2^{p^3+p+1}+\cdots+2019^{p^3+p+1}$$

να είναι πολλαπλάσιο του p.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>

Για κάθε φυσικό αριθμό ν έχουμε

$$\nu^{p^3+p+1}=\left(\nu^{p^2}\right)^p\cdot\nu^p\cdot\nu$$

Όμως από το μικρό θεώρημα του Fermat έχουμε ότι για κάθε α ακέραιο αριθμό και p πρώτο αριθμό ισχύει

$$\alpha^p\equiv\alpha(modp)$$

Τότε παίρνουμε

$$\left(\nu^{p^2}\right)^p\cdot\nu^p\cdot\nu\equiv\nu^{p^2}\cdot\nu\cdot\nu\equiv(\nu^p)^p\cdot\nu\cdot\nu\equiv\nu^p\cdot\nu\cdot\nu\equiv\nu\cdot\nu\cdot\nu\equiv\nu^3(modp)$$

Άρα

$$1^{p^3+p+1}+2^{p^3+p+1}+\cdots+2019^{p^3+p+1}\equiv1^3+2^3+\cdots+2019^3(modp)$$

$$\equiv\left(\frac{2019\cdot2020}{2}\right)^2(modp)\equiv(2019\cdot1010)^2(modp).$$

Πρέπει να ισχύει ότι $(2019\cdot1010)\equiv0(modp)$

Έχουμε

$$1010=2\cdot3\cdot101$$
$$2019=3\cdot673$$

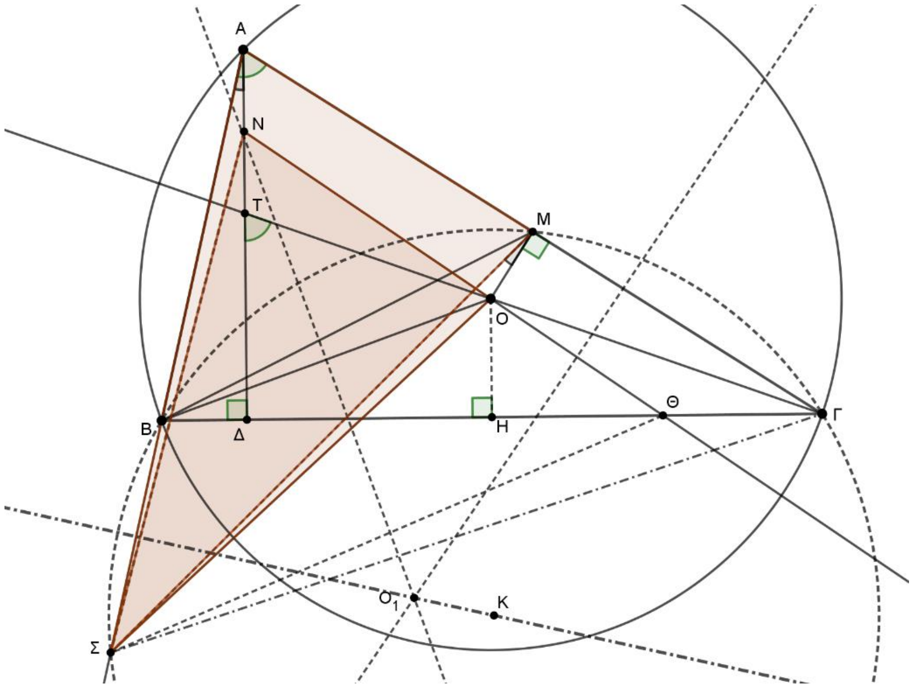
ως γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Επομένως

$$p=2,3,5,101 \text{ ή } 673$$

Πρόβλημα 3 **:** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O, και $A\varDelta$ το ύψος του (το σημείο $\varDelta$ είναι το ίχνος του ύψους πάνω στην $B\varGamma$). Έστω T το σημείο τομής της $\varGamma O$ με την $A\varDelta$. Θεωρούμε N, M τα μέσα των τμημάτων AT και $A\varGamma$ αντίστοιχα. Φέρουμε την ευθεία NO και ονομάζουμε $\varTheta$ το σημείο τομής της με την $B\varGamma$. Αν K, O_1 τα κέντρα των περιεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $\varDelta B\varGamma M, \varDelta BO\varTheta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $KO_1 \perp AB$.

Προτεινόμενη λύση:



Έστω $\varSigma$ το σημείο τομής του περιεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\varDelta BM\varGamma$ με την ευθεία AB. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $\varSigma BO\varTheta$ είναι εγγράψιμο, δηλαδή αρκεί

$$\angle \varSigma B\varTheta = \angle \varSigma O\varTheta$$

Ξέρουμε ότι

$$\angle \varSigma B\varGamma = \angle \varSigma M\varGamma = 90^\circ + \angle \varSigma MO$$

Όμως,

$$\angle \varSigma MO + 90^\circ = \angle \varSigma B\varGamma \Longrightarrow \angle \varSigma MO = \angle \varSigma B\varGamma - 90^\circ$$

Αλλά,

$$\angle \varSigma B\varGamma = 180^\circ - \angle AB\varGamma = 180^\circ - (180^\circ - 90^\circ - \angle \varSigma AN) = 90^\circ + \angle \varSigma AN$$

Άρα

$$\angle \varSigma MO = \angle \varSigma AN$$

Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\varDelta \varSigma ON$ και $\varDelta \varSigma MA$ είναι όμοια.

Αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\varDelta \varSigma NA$ και $\varDelta \varSigma ON$ είναι όμοια. Έχουμε από προηγούμενα ότι

$$\angle \varSigma MO = \angle \varSigma AN$$

επομένως θα ήταν αρκετό να δείξουμε ότι

$$\frac{A\varSigma}{\varSigma M} = \frac{AN}{OM}$$

Το τετράπλευρο $B\varSigma\varGamma M$ είναι εγγεγραμμένο. Επομένως από την ομοιότητα των τριγώνων

$$\varDelta A\varSigma M \approx \varDelta A\varGamma B$$

προκύπτει

$$\frac{A\Sigma}{\Sigma M}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma} \qquad (1)$$

Το σημείο O είναι το περίκεντρο του τριγώνου $\varDelta AB\Gamma$.
Επομένως,

$$\angle O\Gamma A=90°-\angle MO\Gamma=90°-\angle B$$

και

$$\angle AT\Gamma=180°-\angle \Gamma T\varDelta=180°-(180°-90°-\angle T\Gamma\varDelta)=90°+\angle T\Gamma\varDelta$$

Αν $OH\perp B\Gamma$ τότε

$$\angle AT\Gamma=90°+\angle T\Gamma\varDelta=90°+180°-90°-\angle \Gamma OH=180°-\angle A$$

Από τον νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα $\varDelta AT\Gamma,\varDelta OM\Gamma$ και $\varDelta AB\Gamma$, έχουμε

$$\frac{A\Gamma}{\eta\mu A}=\frac{AT}{\eta\mu(90°-\angle B)}$$

Όμως

$$\eta\mu(\angle O\Gamma M)=\eta\mu(90°-\angle B)=\frac{OM}{O\Gamma}\Rightarrow O\Gamma=\frac{OM}{\eta\mu(90°-\angle B)}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ισότητες θα έχουμε

$$\frac{\frac{AT}{\eta\mu(90°-\angle B)}}{\frac{OM}{\eta\mu(90°-\angle B)}}=\frac{\frac{A\Gamma}{\eta\mu A}}{O\Gamma}$$

Άρα θα έχουμε

$$\frac{AT}{OM}=\frac{A\Gamma}{O\Gamma\eta\mu A}\Rightarrow\frac{2AN}{OM}=\frac{A\Gamma}{O\Gamma\eta\mu A}\Rightarrow\frac{AN}{OM}=\frac{A\Gamma}{2O\Gamma\eta\mu A} \qquad (2)$$

Από το τρίγωνο $\varDelta OH\Gamma$ θα έχουμε

$$\eta\mu(\angle HO\Gamma)=\frac{H\Gamma}{O\Gamma}\Rightarrow\eta\mu A=\frac{H\Gamma}{O\Gamma}=\frac{B\Gamma}{2O\Gamma}\Rightarrow 2O\Gamma\eta\mu A=B\Gamma$$

Επομένως, η (2) γίνεται

$$\frac{AN}{OM}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma} \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), παίρνουμε

$$\frac{A\Sigma}{\Sigma M}=\frac{AN}{OM} \qquad (4)$$

Δηλαδή , $\varDelta AN\Sigma\approx\varDelta\Sigma MO$.
Άρα και τα τρίγωνα $\varDelta\Sigma MA$ και $\varDelta\Sigma ON$ είναι όμοια, γιατί $\angle A\Sigma M=\angle N\Sigma O$ και πλευρές ανάλογες από την (4). Τότε

$$\angle BO\Theta=180°-\angle NO\Sigma$$

και αφού από την ομοιότητα έχουμε $\angle NO\Sigma=\angle AM\Sigma$,τότε παίρνουμε

$$\angle BO\Theta=180°-\angle AM\Sigma=\angle\Sigma M\Gamma$$

και αφού από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BM\Gamma\Sigma$ έχουμε $\angle\Sigma M\Gamma=\angle\Sigma B\Gamma$, θα πάρουμε

$$\angle BO\Theta=\angle\Sigma B\Theta$$

Άρα το τετράπλευρο $BO\Theta\Sigma$ είναι εγγράψιμο. Άρα οι περιεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\varDelta BM\Gamma$ και $\varDelta BO\Theta$ έχουν κοινή χορδή την $B\Sigma$ και επομένως $KO_1\perp AB$.

<u>Πρόβλημα 4</u> : Σε μια τάξη 10 μαθητών δόθηκε ένα διαγώνισμα 15 προβλημάτων. Γνωρίζουμε ότι κάθε πρόβλημα λύθηκε σωστά από τουλάχιστον 7 μαθητές.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ζεύγος $\{x, y\}$ μαθητών, ώστε κάθε πρόβλημα να λύθηκε σωστά από τουλάχιστον ένα μαθητή απ' αυτούς.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>
Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Μετράμε με δύο διαφορετικούς τρόπους το πλήθος S των ζευγών $(\{x, y\}, P)$, όπου οι x, y είναι δύο μαθητές οι οποίοι δεν έλυσαν το πρόβλημα P.
Αφού δεν ισχύει το ζητούμενο, για κάθε ζεύγος $\{x, y\}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα πρόβλημα P το οποίο δεν έλυσαν. Άρα

$$S \geq \binom{10}{2} = 45$$

Επίσης κάθε πρόβλημα P δεν λύθηκε από το πολύ τρείς μαθητές και άρα από το πολύ $\binom{3}{2} = 3$ ζεύγη μαθητών. Άρα

$$S \leq 3 \cdot 15 = 45$$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει κάθε πρόβλημα να μην λύθηκε από 3 ακριβώς μαθητές και για κάθε δύο μαθητές υπάρχει ακριβώς ένα πρόβλημα που δεν έλυσε κανένας τους.
Έστω ένας μαθητής x και έστω ότι δεν έλυσε τα προβλήματα

$$P_1, P_2, \dots, P_k$$

Έστω x, a_i, b_i οι μαθητές που δεν έλυσαν το πρόβλημα P_i. Για $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq k)$ πρέπει $a_i \neq a_j, b_j$ και $b_i \neq a_j, b_j$. Άρα οι $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$ είναι $2k$ διαφορετικοί μαθητές. Μαζί με τον x έχουμε $2k + 1$ μαθητές. Οπότε υπάρχει τουλάχιστον ακόμη ένας, έστω ο y διαφορετικός από τους $x, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$. Τότε όμως για τους x, y δεν υπάρχει πρόβλημα που δεν έλυσε κανένας τους, άτοπο.