ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Β΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 10/02/2019 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **<u>όλα</u>** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>Πρόβλημα 1</u> : Έστω p πρώτος αριθμός και β ακέραιος αριθμός τέτοιοι ώστε να ισχύουν:

- Ο αριθμός $2019+\beta$ είναι πολλαπλάσιο του p
- Ο αριθμός $2019^3+\beta^3$ είναι πολλαπλάσιο του p^2
- Ο αριθμός p^2 δεν διαιρεί τον $2019+\beta$.

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2019^3+\beta^3$ είναι πολλαπλάσιο του p^3

<u>Προτεινόμενη λύση</u>

1ον) Αν $p=3$, τότε $p=3/2019+\beta \Longrightarrow p=3\ /\ \beta$

Αφού ($p=3/2019$ και $p=3\ /\ \beta$), προκύπτει ότι ($p^3/2019^3$ **και** p^3/β^3) και συνεπώς $p^3/2019^3+\beta^3$

2ον) Αν $p\neq 3$, τότε από τα δεδομένα έχουμε:

$p^2/2019^3+\beta^3 \Longrightarrow p^2/(2019+\beta)^3-3\cdot 2019\cdot\beta(2019+\beta)\ \ :(1)$

Όμως, $p\ /\ 2019+\beta \Longrightarrow p^2\ /\ (2019+\beta)^3$ και p^2 δεν διαιρεί τον $2019+\beta$, οπότε από την (1) παίρνουμε ότι $p^2\ /\ 3\cdot 2019\cdot\beta \Longrightarrow p\ /\ 3\cdot 2019\cdot\beta$

Επειδή ο p δεν διαιρεί το 3, έχουμε ότι $p\ /\ 2019$ **ή** $p\ /\ \beta$

Αφού $p\ /\ 2019+\beta$ παίρνουμε ότι ($p\ /\ 2019$ **και** $p\ /\ \beta$) απ' όπου ($p^3\ /\ 2019^3$ **και** $p^3\ /\ \beta^3$).

Συνεπώς, $p^3/2019^3+\beta^3$

<u>Πρόβλημα 2 :</u> Έστω θετικοί ακέραιοι μ,ν ώστε ο αριθμός $A=\mu^3+\nu^3-(\mu+\nu)^2$ να είναι επίσης θετικός ακέραιος.

(α) Να αποδείξετε ότι $A=(\mu+\nu)(\mu^2+\nu^2-\mu\nu-\mu-\nu)$

(β) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης A.

<u>Προτεινόμενη λύση</u>

(α) $$\begin{aligned} A=\mu^3+\nu^3-(\mu+\nu)^2 &= (\mu+\nu)^3-3\mu\nu(\mu+\nu)-(\mu+\nu)^2 \\ &= (\mu+\nu)\big((\mu+\nu)^2-3\mu\nu-(\mu+\nu)\big) \\ &= (\mu+\nu)(\mu^2+\nu^2-\mu\nu-\mu-\nu) \end{aligned}$$

(β) $A>0 \Longrightarrow (\mu+\nu)(\mu^2+\nu^2-\mu\nu-\mu-\nu)>0:(1)$

- Αν $\mu=\nu$, τότε από την (1) έχουμε

$$A=2\mu(2\mu^2-\mu^2-2\mu)=2\mu^2(\mu-2)>0 \Longrightarrow \mu>2$$

Άρα $A \geq 2 \cdot 3^2(3-2) = 18 \Rightarrow A \geq 18$

- Αν $\mu > \nu$, τότε
  - Αν $\nu = 1$, τότε από την (1) έχουμε

    $$A = (\mu+1)(\mu^2+1-\mu-\mu-1) = \mu(\mu+1)(\mu-2) > 0 \Rightarrow \mu > 2$$

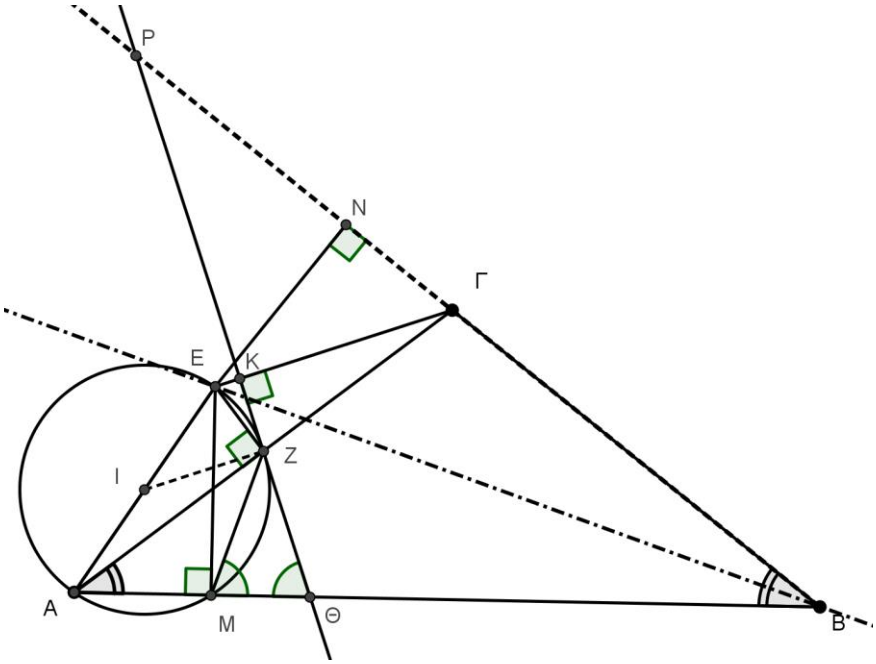
    Άρα $A \geq 3 \cdot (3+1)(3-2) = 12 \Rightarrow A \geq 12$
  - Αν $\mu > \nu \geq 2$, τότε $\mu \geq \nu + 1$ και από το (α) έχουμε

    $$\begin{aligned} A = (\mu+\nu)(\mu^2+\nu^2-\mu\nu-\mu-\nu) &= (\mu+\nu)(\mu(\mu-\nu-1)+\nu^2-\nu) \\ &\geq (2\nu+1)(\nu^2-\nu) \\ &\geq 5(2^2-2) = 10 \Rightarrow A \geq 10 \end{aligned}$$

Από τα πιο πάνω προκύπτει τελικά ότι $\boldsymbol{A_{min} = 10}$

Πρόβλημα 3: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ με $\Gamma A = \Gamma B$ και $\angle A\Gamma B > 90°$. Ονομάζουμε E το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του $A\Gamma$ και της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\angle B$ του τριγώνου $\Delta AB\Gamma$. Ο κύκλος με διάμετρο το AE τέμνει την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο Z. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Z τέμνει την AB στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι $AZ = A\Theta$.

Προτεινόμενη λύση



Έστω ότι ο κύκλος διαμέτρου AE τέμνει την $A\Gamma$ στο M. Τότε το τρίγωνο AME είναι ορθογώνιο στο M.

Έστω P το σημείο τομής της εφαπτομένης στο Z με την ευθεία $B\Gamma$ και EN η απόσταση του E από την BP. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα AME και ΓNE είναι ίσα, αφού $EM = EN$ (E σημείο της διχοτόμου της $\angle \Gamma BA$) και $EA = E\Gamma$(EZ μεσοκάθετος της πλευράς $A\Gamma$).

Άρα $\angle AEM = \angle \Gamma EN$. Επίσης, $\angle \Theta PB = \angle \Gamma EN$ (οξείες με κάθετες πλευρές). Συνεπώς, $\angle AEM = \angle \Theta PB$.

Έχουμε διαδοχικά: $\angle AZ\Theta = \angle AEZ$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης)

$$\begin{aligned}
&= \angle AEM + \angle MEZ \\
&= \angle \Gamma EN + \angle ZAM \text{ (} AEZM \text{ εγγεγραμμένο)} \\
&= \angle \Theta PB + \angle \Gamma AB \\
&= \angle \Theta PB + \angle \Gamma BA \ \text{ (}\Delta A\Gamma B\text{ ισοσκελές)} \\
&= \angle A\Theta Z \text{ (εξωτερική γωνία του } \Delta BP\Theta\text{)}
\end{aligned}$$

Άρα το τρίγωνο $ZA\Theta$ είναι ισοσκελές, απ όπου $AZ = A\Theta$

Πρόβλημα4: Σε μια συνάντηση 100 ατόμων, κάθε άτομο αντιπαθεί ακριβώς ένα άλλο άτομο. (Η αντιπάθεια δεν είναι απαραίτητα αμοιβαία.)

(α) Να αποδείξετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε 34 άτομα, ώστε καθένα από αυτά να μην αντιπαθεί κάποιο άλλο άτομο από αυτά.
(β) Να βρείτε παράδειγμα για το οποίο όπως και να επιλέξουμε 35 άτομα, κάποιο από αυτά θα αντιπαθεί κάποιο άλλο από αυτά.

Προτεινόμενη λύση

(α) Έστω μια ομάδα A με μέγιστο μέγεθος ώστε κανένα μέλος της να μην αντιπαθεί κάποιο άλλο μέλος της. Έστω B το σύνολο όλων των ατόμων τα οποία αντιπαθεί κάποιο από τα μέλη της ομάδας A. Επειδή κάθε μέλος A αντιπαθεί ακριβώς ένα άτομο, τότε $|B| \leq |A|$. Έστω C το σύνολο όλων των άλλων ατόμων. Αφού το A έχει μέγιστο μέγεθος, δεν μπορούμε να μεταφέρουμε κανένα μέλος του C στο A. Ο μόνος λόγος για να μην μπορούμε να το κάνουμε είναι κάθε μέλος του C να αντιπαθεί κάποιο μέλος του A. (Δεν μπορεί κάποιο μέλος του A να αντιπαθεί κάποιο μέλος του C.) Τότε στο σύνολο C δεν θα υπάρχει μέλος του που να αντιπαθεί κάποιο άλλο μέλος του. Άρα από τον ορισμό του A έχουμε ότι $|C| \leq |A|$. Τότε

$$100 = |A| + \ |B| + |C| \leq 3|A|$$

Άρα $|A| \geq 34$ όπως θέλαμε. (Αν $|A| > 34$ απλά κρατάμε 34 από τα μέλη του A.

(β) Ονομάζουμε τα άτομα $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ και ορίζουμε τις εξής αντιπάθειες:

- Ο x_{3k+1} αντιπαθεί τον x_{3k+2} για $k = 0,1,2, \dots ,33$.
- Ο x_{3k+2} αντιπαθεί τον x_{3k+3} για $k = 0,1,2, \dots ,33$.
- Ο x_{3k+3} αντιπαθεί τον x_{3k+1} για $k = 0,1,2, \dots ,33$.
- Ο x_{100} αντιπαθεί τον x_1.

Θεωρούμε τα 34 σύνολα

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}, \dots , \{x_{97}, x_{98}, x_{99}\}, \{x_{100}\}$$

Αν επιλέξουμε 35 άτομα, δύο από αυτά θα ανήκουν στο ίδιο σύνολο. Από αυτά τα δύο όμως, το ένα θα αντιπαθεί το άλλο.