ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 28/02/2021 *Ώρα Εξέτασης: 09:30 - 12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Σε ένα ζωολογικό κήπο που έχει συνολικά 100 ζώα, κάποια προχώρησαν σε στάση εργασίας. Οι ζέβρες, που είναι το 25% των ζώων που απεργούν, απαιτούν καλύτερες συνθήκες διαβίωσης. Οι πίθηκοι, που είναι το 20% των ζώων που απεργούν, απαιτούν μεγαλύτερη ποικιλία φαγητού. Αν το 1/3 των ζώων που απεργούν είναι ελέφαντες, να βρείτε πόσα ζώα **δεν** απεργούν.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω x ο αριθμός των απεργούντων.
Το 25% του x, δηλαδή το $x/4$, είναι ζέβρες. Επομένως το x είναι πολλαπλάσιο του 4.
Το 20% του x, δηλαδή το $x/5$, είναι πίθηκοι. Επομένως το x είναι πολλαπλάσιο του 5.
Το $x/3$, είναι ελέφαντες. Επομένως το x είναι πολλαπλάσιο του 3.
Άρα το x είναι πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,4,5) = 60$.
Το μόνο πολλαπλάσιο του 60 το οποίο είναι μικρότερο του 100 είναι το 60. Άρα 60 ζώα απεργούν και 40 ζώα δεν απεργούν.

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικά ψηφία του, με τη σειρά που εμφανίζονται, να σχηματίζουν έναν αριθμό ο οποίος να είναι τέλειο τετράγωνο.

Σημείωση: Ένας φυσικός αριθμός ν ονομάζεται τέλειο τετράγωνο αν υπάρχει φυσικός αριθμός κ ώστε $\nu = \kappa^2$. Π.χ. ο 16 είναι τέλειο τετράγωνο επειδή $16 = 4^2$.

Προτεινόμενη Λύση

Τα μόνα διψήφια τέλεια τετράγωνα είναι τα 16,25,36,49,64,81.

- Αν ξεκινήσουμε από το 25 ή το 49 τότε δεν μπορούμε να συνεχίσουμε.
- Αν ξεκινήσουμε από το 64 το επόμενο ψηφίο (αν συνεχίσουμε) μπορεί να είναι μόνο το 9. Μετά δεν μπορούμε να συνεχίσουμε. Μπορούμε δηλαδή να σχηματίσουμε τον 649 αλλά κανένα αριθμό με περισσότερα ψηφία.
- Αν ξεκινήσουμε από το 16 ή το 36 τότε μπορούμε να συνεχίσουμε μόνο όπως στην πιο πάνω περίπτωση. Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τους 1649 και 3649.
- Αν ξεκινήσουμε από το 81 τότε μπορούμε να συνεχίσουμε μόνο όπως στην περίπτωση όπου ξεκινήσαμε από το 16. Μπορούμε τότε να σχηματίσουμε τον 81649

Άρα ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορούμε να σχηματίσουμε είναι ο 81649.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε με παρόμοιο τρόπο να ξεκινήσουμε από τα τελευταία ψηφία αντί από τα πρώτα.

Πρόβλημα 3

Έξι αγόρια παίζουν βώλους, έχοντας στην αρχή του παιχνιδιού 20 βώλους το καθένα. Στο τέλος του παιχνιδιού, ο νικητής έχει εξαπλάσιο αριθμό βώλων από όσους έχει το αγόρι που έχει χάσει τους περισσότερους. Τα άλλα τέσσερα αγόρια έχουν αριθμό βώλων διαδοχικούς αριθμούς, με ένα από αυτά να έχει τον μισό αριθμό βώλων από όσους έχει ο νικητής. Να βρείτε πόσους βώλους έχει κάθε αγόρι στο τέλος του παιχνιδιού.

Προτεινόμενη Λύση

Αν το αγόρι με τους λιγότερους βώλους έχει x βώλους, τότε ο νικητής θα έχει $6x$ βώλους και τα άλλα τέσσερα αγόρια $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3$.

Συνολικά τα αγόρια έχουν

$$x + 6x + \alpha + (\alpha+1) + (\alpha+2) + (\alpha+3) = 7x + 4\alpha + 6$$

βώλους. Όμως συνολικά έχουν $6 \cdot 20 = 120$ βώλους. Άρα $7x + 4\alpha = 114$.

Επίσης, κάποιος από τους $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3$ είναι ίσος με $\frac{6x}{2} = 3x$.

- Αν $\alpha = 3x$ τότε $114 = 7x + 4 \cdot 3x = 19x$. Τότε $x = 6$ και $\alpha = 18$. Σε αυτήν την περίπτωση τα παιδιά έχουν 6,18,19,20,21 και 36 βώλους.
- Αν $\alpha + 1 = 3x$ τότε $114 = 7x + 4 \cdot (3x - 1) = 19x - 4$. Τότε $x = \frac{118}{19}$ που απορρίπτεται επειδή δεν είναι ακέραιος αριθμός.
- Αν $\alpha + 2 = 3x$ τότε $114 = 7x + 4 \cdot (3x - 2) = 19x - 8$. Τότε $x = \frac{122}{19}$ που απορρίπτεται επειδή δεν είναι ακέραιος αριθμός.
- Αν $\alpha + 3 = 3x$ τότε $114 = 7x + 4 \cdot (3x - 3) = 19x - 12$. Τότε $x = \frac{126}{19}$ που απορρίπτεται επειδή δεν είναι ακέραιος αριθμός.

Άρα τα έξι αγόρια στο τέλος έχουν 6,18,19,20,21 και 36 βώλους

Πρόβλημα 4

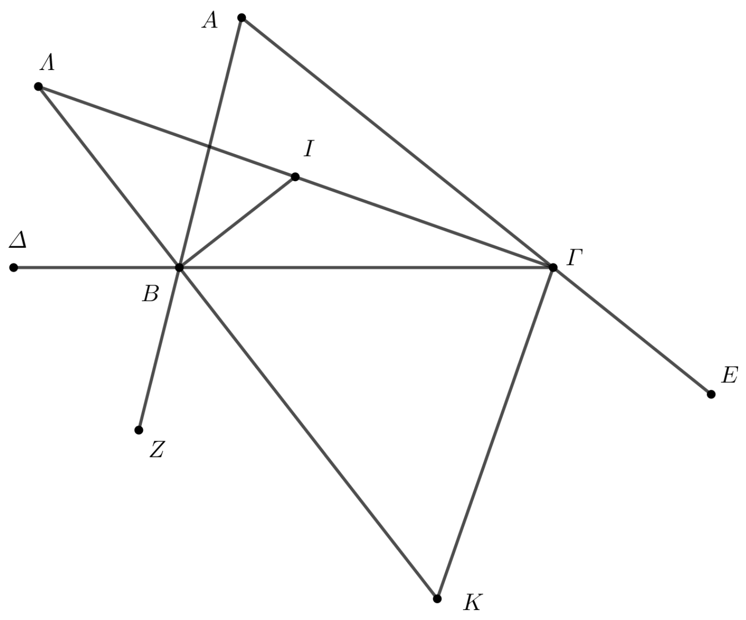
Στο πιο κάτω σχήμα, τα Δ, E και Z βρίσκονται στις προεκτάσεις των $\Gamma B, A\Gamma$ και AB αντίστοιχα και το I βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Lambda$. Οι $BI, \Gamma I, BK, \Gamma K$ και $B\Lambda$ είναι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{B}\Gamma, A\hat{\Gamma}B, \Gamma\hat{B}Z, B\hat{\Gamma}E$ και $A\hat{B}\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) $I\hat{B}K = 90^\circ$

(β) $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

(γ) $B\hat{K}\Gamma = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$

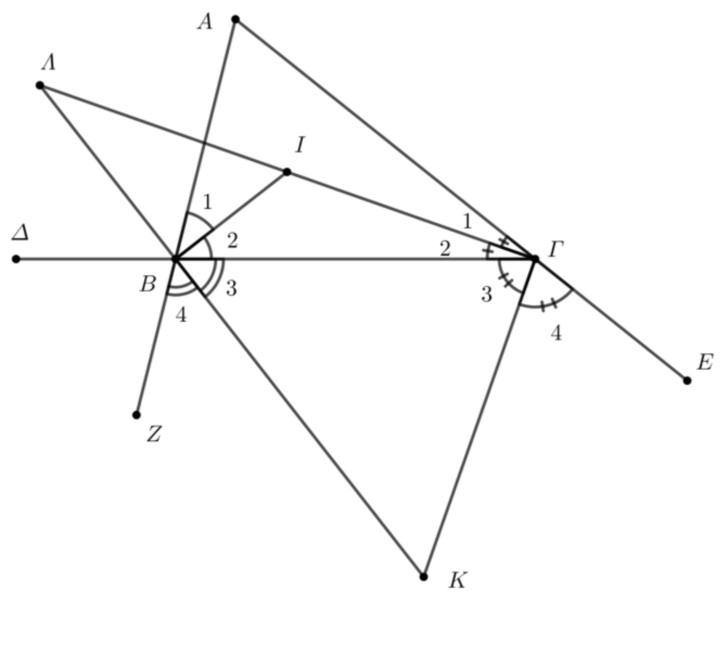
(δ) $B\hat{\Lambda}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$



Προτεινόμενη Λύση

(α) Στο πιο κάτω σχήμα έχουμε $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}, \widehat{B_3} = \widehat{B_4}, \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \hat{B}$ και $\widehat{B_3} + \widehat{B_4} = 180^\circ - \hat{B}$. Άρα

$$\widehat{B_2} = \frac{\hat{B}}{2}, \widehat{B_3} = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} \text{ και } I\hat{B}K = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} = 90^\circ$$



(β) Όπως και στο (α) έχουμε $\widehat{\Gamma_2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Τότε

$$B\hat{I}\Gamma = 180^\circ - \left(\widehat{B_2} + \widehat{\Gamma_2}\right) = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

(γ) Όπως και στο (α) έχουμε $\widehat{\Gamma_3} = \frac{180^\circ - \hat{\Gamma}}{2}$. Τότε

$$B\hat{K}\Gamma = 180^\circ - \left(\widehat{B_3} + \widehat{\Gamma_3}\right) = 180^\circ - \frac{(180^\circ - \hat{B}) + (180^\circ - \hat{\Gamma})}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

(δ) Έχουμε $B\hat{I}\Gamma = B\hat{\Lambda}\Gamma + \widehat{B_3} + \widehat{B_4}$ (εξωτερική γωνία τριγώνου $B\Lambda I$). Τότε

$$B\hat{\Lambda}\Gamma = B\hat{I}\Gamma - \left(\widehat{B_3} + \widehat{B_4}\right) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} - \left(\widehat{B_1} + \widehat{B_2}\right) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ = \frac{\hat{A}}{2}$$