ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2021

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

<u>Ημερομηνία</u>: 13/11/2021 *<u>Ώρα Εξέτασης</u>: 15:00-17:00*

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ:</u>

1. Να λύσετε <u>όλα</u> τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</u>

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = \frac{(-15)^3}{5^3} + \frac{8^3}{-4^3} - \left(-\frac{3}{9}\right)^{-3} + \frac{(-12)^4}{6^4}$ και $\beta = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2021}$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \alpha \div (4\beta) - \beta + \frac{4}{\alpha}$

<u>Προτεινόμενες Λύσεις</u>

$$\alpha = \frac{(-15)^3}{5^3} + \frac{8^3}{-4^3} - \left(-\frac{3}{9}\right)^{-3} + \frac{(-12)^4}{6^4} = -\left(\frac{15}{5}\right)^3 - \left(\frac{8}{4}\right)^3 - \left(-\frac{9}{3}\right)^3 + \left(\frac{12}{6}\right)^4$$

$$= -(3)^3 - (2)^3 + (3)^3 + (2)^4 = -8 + 16 = 8$$

$\beta = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots (-1)^{2021} = \underbrace{-1+1}_{0}\underbrace{-1+1}_{0} - \cdots - 1 = -1$ (περριτό πλήθος προσθετέων)

Αφού $\alpha = 8$ και $\beta = -1$ τότε

$A = \alpha \div (4\beta) - \beta + \frac{4}{\alpha} = 8 \div [4(-1)] - (-1) + \frac{4}{8} = -2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{-4+2+1}{2} = -\frac{1}{2}$

Πρόβλημα 2

Στην Β΄ τάξη γυμνασίου ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια είναι $\frac{9}{10}$. Γράφονται στην Β΄ τάξη άλλα 17 αγόρια και ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια γίνεται $\frac{8}{7}$. Να βρείτε πόσα είναι τα κορίτσια.

<u>Προτεινόμενες Λύσεις</u>

Έστω x το πλήθος των αγοριών και y το πλήθος των κοριτσιών στην Α΄ τάξη γυμνασίου, τότε:

$$\frac{x}{y}=\frac{9}{10} \quad (1)$$

$$\frac{x+17}{y}=\frac{8}{7} \quad (2)$$

Όμως:

$$\frac{x+17}{y}=\frac{x}{y}+\frac{17}{y}=\frac{9}{10}+\frac{17}{y} \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{9}{10}+\frac{17}{y}=\frac{8}{7}\Rightarrow\frac{17}{y}=\frac{8}{7}-\frac{9}{10}\Longrightarrow\frac{17}{y}=\frac{17}{70}\Rightarrow 17y=17\cdot 70\Rightarrow y=70$$

Επομένως τα κορίτσια είναι 70.

Πρόβλημα 3

Δίνονται τα σύνολα $A=\{7,8,9\}$ και $B=\{10,11,12\}$. Οι αριθμοί χ,ψ και ω με $\chi<\psi<\omega$, είναι οι μικρότεροι θετικοί ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι **δεν** διαιρούνται με κανένα αριθμό του συνόλου Α και διαιρούνται με όλους τους αριθμούς του συνόλου Β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\chi\cdot\psi}{\omega}$.

<u>Προτεινόμενη Λύση</u>

Αφού οι αριθμοί χ,ψ και ω διαιρούνται με 10, 11 και 12 $\Rightarrow$ χ,ψ και ω είναι πολλαπλάσια του $E.K.\Pi(10,11,12)$.

$$E.K.\Pi(10,11,12)=E.K.\Pi(2\cdot 5,11,2^2\cdot 3)=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$$

Επειδή το $2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$ δεν διαιρείται με κανένα από τους αριθμούς 7,8, 9 και χ είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος δεν διαιρείται με κανένα αριθμό του συνόλου Α και είναι πολλαπλάσιο των αριθμών του συνόλου $B\Rightarrow \chi=\mathbf{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}$

Οι αριθμοί ψ και ω $(\psi<\omega)$ είναι πολλαπλάσια του $2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$ και δεν διαιρούνται με κανένα από τους αριθμούς 7,8 και 9. Ελέγχουμε:

$\psi=2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11$ απορρίπτεται διότι διαιρείται με το 8.

$\psi=3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$ απορρίπτεται διότι διαιρείται με το 9.

$\psi = 4 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ απορρίπτεται διότι διαιρείται με το 8.

$\psi = 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = \mathbf{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11}$ δεκτή.

$\omega = 6 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ απορρίπτεται διότι διαιρείται με το 8 και το 9.

$\omega = 7 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ απορρίπτεται διότι διαιρείται με το 7.

$\omega = 8 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ απορρίπτεται διότι διαιρείται με το 8.

$\omega = 9 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ απορρίπτεται διότι διαιρείται με το 9.

$\omega = 10 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$ απορρίπτεται διότι διαιρείται με το 8.

$\omega = 11 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = \mathbf{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2}$ δεκτή.

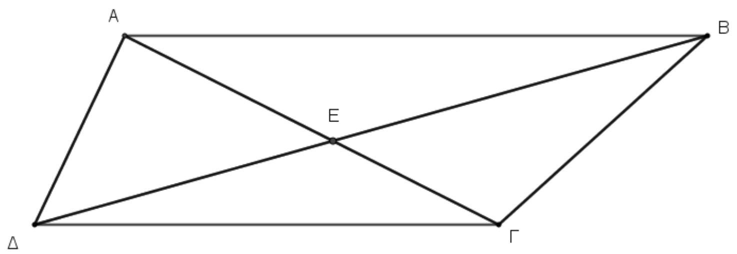
Άρα:

$$\frac{\chi \cdot \psi}{\omega} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2} = \mathbf{300}$$

Πρόβλημα 4

Στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, η $ΒΑ$ είναι παράλληλη με τη $ΔΓ$ και οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ τέμνονται στο $Ε$. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΕ$ είναι $72cm^2$ και το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΕ$ είναι $50cm^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετράπλευρου $ΑΒΓΔ$.

<u>Προτεινόμενη Λύση</u>



Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ έχουν ίδια βάση και ίδιο ύψος ⇒ $E_{ΑΔΓ} = E_{ΒΔΓ}$

$$\Rightarrow E_{ΑΔΕ} + E_{ΔΕΓ} = E_{ΒΕΓ} + E_{ΔΕΓ} \Rightarrow E_{ΑΔΕ} = E_{ΒΕΓ}$$

Έστω $E_{ΑΔΕ} = E_{ΒΕΓ} = x$.

Το ύψος των τριγώνων ΑΔΕ και ΔΕΓ προς τις βάσεις ΑΕ και ΕΓ αντίστοιχα είναι το ίδιο, άρα:

$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{E_{ΑΔΕ}}{E_{ΓΔΕ}} = \frac{x}{50} \quad (1)$$

Το ύψος των τριγώνων ΒΓΕ και ΒΕΑ προς τις βάσεις ΕΓ και ΑΕ αντίστοιχα είναι το ίδιο, άρα:

$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{E_{ΑΕΒ}}{E_{ΒΕΓ}} = \frac{72}{x} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{x}{50} = \frac{72}{x} \Leftrightarrow x^2 = 3600 \Leftrightarrow x = 60$$

Άρα:

$$E_{ΑΒΓΔ} = 60 + 60 + 50 + 72 = 242cm^2$$