



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2025

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/11/2025

Ωρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλους τους τριψήφιους αριθμούς με τις πιο κάτω ιδιότητες:

- το ψηφίο των δεκάδων ισούται με το άθροισμα του ψηφίου των εκατοντάδων και των μονάδων,
- το άθροισμα όλων των ψηφίων είναι 14.

Λύση:

Θεωρούμε τον τριψήφιο αριθμό $AB\Gamma$.

Από τις δύο ιδιότητες έχουμε ότι $B = A + \Gamma$ και $A + B + \Gamma = 14$

Από τις δύο πιο πάνω σχέσεις προκύπτει ότι $2A + 2\Gamma = 14 \Rightarrow A + \Gamma = 7$ και συνεπώς το $B = 7$

Οι πιθανές τιμές για τα ψηφία A και Γ είναι:

$$(A, \Gamma) = (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), (7,0)$$

Και οι ζητούμενοι τριψήφιοι αριθμοί που ικανοποιούν τις πιο πάνω ιδιότητες είναι:

$$176, 275, 374, 473, 572, 671, 770$$

Πρόβλημα 2

α) Να δείξετε ότι:

$$40 \cdot 2^{6n-7} + 11 \cdot 2^{6n-4} = 2^{6n}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{n^2} - 40 \cdot 2^{6n-7} - 11 \cdot 2^{6n-4} = 0$$

Λύση:

$$\alpha) \quad 40 \cdot 2^{6n-7} + 11 \cdot 2^{6n-4} = 5 \cdot 2^3 \cdot 2^{6n} \cdot 2^{-7} + 11 \cdot 2^{6n} \cdot 2^{-4} =$$

$$5 \cdot 2^{6n} \cdot 2^{-4} + 11 \cdot 2^{6n} \cdot 2^{-4} = 16 \cdot 2^{6n} \cdot 2^{-4} = 2^4 \cdot 2^{6n} \cdot 2^{-4} = 2^{6n}$$

$$\beta) 2^{v^2} - 40 \cdot 2^{6v-7} - 11 \cdot 2^{6v-4} = 0 \Rightarrow 2^{v^2} - (40 \cdot 2^{6v-7} + 11 \cdot 2^{6v-4}) = 0 \quad (\text{από (α)})$$

$$2^{v^2} - 2^{6v} = 0 \Rightarrow 2^{v^2} = 2^{6v}$$

Δηλαδή, $v^2 = 6v$. Προκύπτουν οι λύσεις $v = 0$ ή $v = 6$

Πρόβλημα 3

Η Άννα, ο Βασίλης, ο Γιώργος και η Δανάη, σκέφτονται ο καθένας από έναν διαφορετικό πρώτο αριθμό. Το άθροισμα των αριθμών της Άννας και του Βασίλη, ισούται με τον αριθμό του Γιώργου. Το άθροισμα των αριθμών της Άννας και του Γιώργου, ισούται με τον αριθμό της Δανάης. Να βρείτε όλες τους δυνατούς αριθμούς που μπορεί να σκεφτούν η Άννα, ο Βασίλης, ο Γιώργος και η Δανάη ώστε να ισχύουν τα πιο πάνω.

Λύση:

Γράφουμε τους πρώτους αριθμούς **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...**

Παρατηρούμε ότι ο μοναδικός άρτιος αριθμός είναι το 2, ενώ όλοι οι άλλοι είναι περιττοί.

Αν ο αριθμός της Άννας και ο αριθμός του Γιώργου είναι και οι δυο περιττοί αριθμοί, τότε το άθροισμα θα είναι ίσο με άρτιο αριθμό, και άρα ο αριθμός της Δανάης θα είναι άρτιος. Αφού όμως ο αριθμός της Δανάης είναι πρώτος αριθμός, αυτό σημαίνει πως πρέπει να ισούται με το 2. Εύκολα όμως βλέπουμε πως δεν υπάρχουν δυο πρώτοι αριθμοί με άθροισμα ίσο με 2. Επομένως, τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς της Άννας και του Γιώργου θα είναι άρτιος και συγκεκριμένα ίσος με το 2 (αφού το 2 είναι ο μόνος άρτιος πρώτος αριθμός).

Αφού όμως ο αριθμός του Γιώργου είναι το άθροισμα δυο πρώτων αριθμών, δεν μπορεί να ισούται με 2. Άρα, ο αριθμός της Άννας είναι ίσος με 2.

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός του Γιώργου είναι κατά 2 μεγαλύτερος από τον αριθμό του Βασίλη, και ο αριθμός της Δανάης είναι κατά 4 μεγαλύτερος από τον αριθμό του Βασίλη. Τότε όμως θα έχουμε ότι είτε ο αριθμός του Βασίλη, είτε του Γιώργου, είτε της Δανάης, θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν ο αριθμός του Βασίλη δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε το υπόλοιπο του όταν διαιρεθεί με το 3 θα είναι είτε 1, είτε 2. Δηλαδή ο αριθμός του Βασίλη θα είναι της μορφής $3k + 1$ ή $3k + 2$ αντίστοιχα.

Τότε όμως στην πρώτη περίπτωση ο Γιώργος θα έχει αριθμό της μορφής:

$$3k + 1 + 2 = 3(k + 1) = \text{πολλαπλάσιο του 3}$$

και στη δεύτερη περίπτωση η Δανάη θα έχει αριθμό της μορφής:

$$3k + 2 + 4 = 3(k + 2) = \text{πολλαπλάσιο του 3}$$

Επομένως ο αριθμός του Γιώργου ή ο αριθμός της Δανάης αντίστοιχα, θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Ο μόνος πρώτος αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 3 είναι το 3. Παρατηρούμε ότι $3 - 2 = 1$ και $3 - 4 = -1$ δεν είναι πρώτοι αριθμοί, επομένως αναγκαστικά το 3 είναι ο αριθμός του Βασίλη.

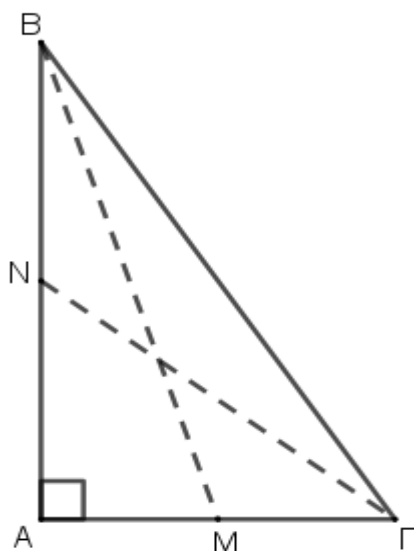
Έχουμε άρα ότι οι αριθμοί της Άννας, του Βασίλη, του Γιώργου και της Δανάης είναι: **2, 3, 5, 7** αντίστοιχα.

Πρόβλημα 4

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Έστω M και N τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Αν $GN = 2\sqrt{61}$ και $BM = \sqrt{601}$ να υπολογίσετε:

- α) το μήκος της υποτείνουσας του τριγώνου $AB\Gamma$,
- β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση:



α) Θέτουμε $AB = 2x$ και $A\Gamma = 2y$

Προκύπτει ότι : $AN = NB = x$ και $AM = M\Gamma = y$

Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ABM προκύπτει :

$$(2x)^2 + y^2 = (BM)^2 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 601 \quad (1)$$

Ομοίως, εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AN\Gamma$ προκύπτει :

$$x^2 + (2y)^2 = (NG)^2 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 244 \quad (2)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$5x^2 + 5y^2 = 845 \Rightarrow x^2 + y^2 = 169 \quad (3)$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε τη σχέση:

$$(2x)^2 + (2y)^2 = (B\Gamma)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = (B\Gamma)^2 \quad (\text{από την σχέση (3)})$$

$$(B\Gamma)^2 = 4 \cdot 169 \Rightarrow B\Gamma = \sqrt{4} \cdot \sqrt{169} \Rightarrow B\Gamma = 2 \cdot 13 \Rightarrow B\Gamma = 26 \mu$$

β) Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει:

$$4y^2 - y^2 = 244 - 169 \Rightarrow 3y^2 = 75 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5 \mu$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $y = 5 \mu$ σε μια από τις πιο πάνω σχέσεις προκύπτει η τιμή του $x = 12 \mu$. Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε ότι: $x^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = 12 \mu$

Συνεπώς, οι κάθετες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούνται με: $AB = 24 \mu$ και $A\Gamma = 10 \mu$

Το ζητούμενο εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με: $E_{AB\Gamma} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \tau. \mu$