ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/11/2022 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1: Για κάθε θετικό ακέραιο ν, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$5^{2\nu} + 3\nu - 1$$

είναι πολλαπλάσιο του 9.

Πρόβλημα 2: Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Από το μέσο Δ του τόξου $\widehat{BA\Gamma}$ φέρνουμε τη χορδή ΔZ παράλληλη προς την $A\Gamma$. Αν E και H είναι αντίστοιχα οι προβολές των Δ και Z στην $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΔAE και $ZH\Gamma$ είναι ίσα.
(β) $\angle \Delta\Gamma Z = \angle A\Gamma B$
(γ) $AB + AE = E\Gamma$

Πρόβλημα 3: Δίνεται η παράσταση

$$A(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{|3x-1|} + \frac{x+1}{|x+1|}\right)$$

(α) Να γραφεί η παράσταση A χωρίς απόλυτα για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.
(β) Να βρείτε τις **ακέραιες** τιμές του x για τις οποίες η αριθμητική τιμή της παράστασης A είναι ακέραιος αριθμός.

Πρόβλημα 4: Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\hat{B} = 2\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 = \alpha(\alpha + \gamma)$.

(Με $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ συμβολίζουμε τα μέτρα των γωνιών και αντίστοιχα με α, β, γ τα μέτρα των απέναντι πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.)