ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/11/2022 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Για κάθε θετικό ακέραιο ν, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$5^{2\nu} + 3\nu - 1$$

είναι πολλαπλάσιο του 9.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής.

- Για $\nu = 1$ ο αριθμός $5^{2\cdot 1} + 3 \cdot 1 - 1 = 27 = 3 \cdot 9$, είναι πολλαπλάσιο του 9.
- Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $5^{2\kappa} + 3\kappa - 1$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Δηλαδή
$$5^{2\kappa} + 3\kappa - 1 = 9A \Leftrightarrow 5^{2\kappa} = 9A - 3\kappa + 1, \qquad A \in \mathbb{N}$$
- Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός $5^{2(\kappa+1)} + 3(\kappa+1) - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9.
Έχουμε διαδοχικά:
$$\begin{aligned} 5^{2(\kappa+1)} + 3(\kappa+1) - 1 &= 5^2 \cdot 5^{2\kappa} + 3\kappa + 2 = 25(9A - 3\kappa + 1) + 3\kappa + 2 \\ &= 25 \cdot 9A - 75\kappa + 25 + 3\kappa + 2 = 25 \cdot 9A - 72\kappa + 27 \\ &= 9(25A - 8\kappa + 3) = 9B, B \in \mathbb{N} \text{ πολλαπλάσιο του 9.} \end{aligned}$$

Συνεπώς αποδείχθηκε επαγωγικά ότι ο αριθμός $5^{2\nu} + 3\nu - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 9, για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Πρόβλημα 2

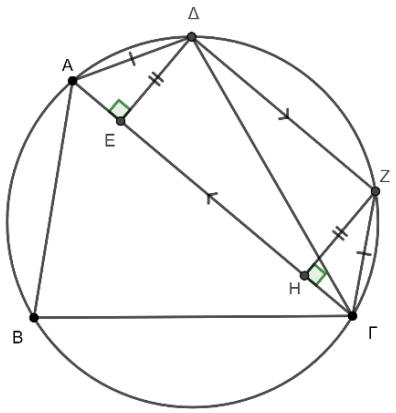
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Από το μέσο Δ του τόξου $\widehat{BA\Gamma}$ φέρνουμε τη χορδή ΔZ παράλληλη προς την $A\Gamma$. Αν E και H είναι αντίστοιχα οι προβολές των Δ και Z στην $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΔAE και $ZH\Gamma$ είναι ίσα.

(β) $\angle \Delta\Gamma Z = \angle A\Gamma B$

(γ) $AB + AE = E\Gamma$

Λύση



(α) Επειδή οι χορδές $\Delta Z, A\Gamma$ είναι παράλληλες, τα τόξα $\widehat{A\Delta}, \widehat{Z\Gamma}$ είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες, δηλαδή $A\Delta = Z\Gamma$. Επίσης, $\Delta E = ZH$. Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAE και $ZH\Gamma$ είναι ίσα.

(β) $\angle \Delta\Gamma Z = \frac{\widehat{\Delta Z}}{2} = \frac{\widehat{\Delta\Gamma} - \widehat{Z\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{\Delta B} - \widehat{A\Delta}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \angle A\Gamma B$

(γ) $AB + AE = \Delta Z + AE = EH + H\Gamma = E\Gamma$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η παράσταση

$$A(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{|3x-1|}+\frac{x+1}{|x+1|}\right)$$

(α) Να γραφεί η παράσταση A χωρίς απόλυτα για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τις **ακέραιες** τιμές του x για τις οποίες η αριθμητική τιμή της παράστασης A είναι ακέραιος αριθμός.

<u>Λύση</u>

(α) Αρχικά πρέπει $x\neq\frac{1}{3}$, -1 και διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

- $x<-1$. Τότε $3x-1<0$ και $x+1<0$, οπότε $|3x-1|=-(3x-1)$, $|x+1|=-(x+1)$ και έχουμε
$$A(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3x-1}-1\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{3x-1}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3x-1+1}{3x-1}=-\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)$$
- $-1<x<\frac{1}{3}$. Τότε $3x-1<0$ και $x+1>0$, οπότε $|3x-1|=-(3x-1)$, $|x+1|=x+1$ και έχουμε
$$A(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3x-1}+1\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3x-2}{3x-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3x-1-1}{3x-1}=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3x-1}\right)$$
- $x>\frac{1}{3}$. Τότε $3x-1>0$ και $x+1>0$, οπότε $|3x-1|=3x-1$, $|x+1|=x+1$ και έχουμε
$$A(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3x-1}+1\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{3x-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3x-1+1}{3x-1}=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)$$

Συνεπώς,

$$A(x)=\begin{cases}-\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3x-1}\right) & ,x<-1\\ \frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3x-1}\right), & -1<x<\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3x-1}\right), & x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

(β) Σύμφωνα με τα πιο πάνω, έχουμε:

- Αν $x<-1$, τότε
$$\begin{aligned}3x<-3\Rightarrow 3x-1<-4 &\Rightarrow -\frac{1}{4}<\frac{1}{3x-1}<0\\ &\Rightarrow \frac{3}{4}<1+\frac{1}{3x-1}<1\\ &\Rightarrow -\frac{2}{3}\cdot 1<-\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)<-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\\ &\Rightarrow -\frac{2}{3}<A(x)<-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Άρα, το $A(x)$ δεν είναι ακέραιος για $x<-1$

- Αν $-1<x<\frac{1}{3}$, τότε $x=0$ και $A(0)=\frac{4}{3}\notin\mathbb{Z}$

- Αν $x > \frac{1}{3}$, τότε η μικρότερη ακέραια τιμή του x είναι $x = 1$ και $A(1) = 1 \in \mathbb{Z}$
  Για $x > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} 3x > 3 \Longrightarrow 3x - 1 > 2 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{3x-1} < \frac{1}{2} \\ \Longrightarrow 1 < 1 + \frac{1}{3x-1} < \frac{3}{2} \\ \Longrightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3x-1}\right) < 1 \\ \Longrightarrow \frac{2}{3} < A(x) < 1 \end{aligned}$$

Άρα, το $A(x)$ δεν είναι ακέραιος για $x > 1$

Συνεπώς, μοναδική λύση είναι $\boldsymbol{x = 1}$

Πρόβλημα 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\hat{B} = 2\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 = \alpha(\alpha + \gamma)$.

(Με $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ συμβολίζουμε τα μέτρα των γωνιών και αντίστοιχα με α, β, γ τα μέτρα των απέναντι πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.)

<u>Λύση</u>

Από το νόμο των ημιτόνων, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}$$

και, επειδή $\hat{B} = 2\hat{A}$, αντικαθιστούμε και παίρνουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{\eta\mu 2A} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu A} \ : \ (1)$$

Από το νόμο των συνημιτόνων, έχουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \Longrightarrow 2\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{\beta\gamma}$$

και τότε η (1) γίνεται, διαδοχικά

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} \Longrightarrow \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 - \alpha^3 = \beta^2\gamma \\ \Longrightarrow \alpha\beta^2 - \beta^2\gamma = \alpha^3 - \alpha\gamma^2 \\ \Longrightarrow \beta^2(\alpha - \gamma) = \alpha(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma) \end{aligned}$$

- Αν $\alpha \neq \gamma$, από την τελευταία παίρνουμε $\beta^2 = \alpha(\alpha + \gamma)$

- Αν $\alpha = \gamma$, τότε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και, επειδή $\hat{B} = 2\hat{A}$, παίρνουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 45°$ και $\hat{B} = 2\hat{A} = 90°$
  Όμως τότε έχουμε $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 \Longrightarrow \beta^2 = \alpha^2 + \alpha\gamma \Longrightarrow \beta^2 = \alpha(\alpha + \gamma)$

* Διαφορετικές λύσεις γίνονται αποδεκτές εάν τεκμηριωθούν σωστά