	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ **ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ** **ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2020 (ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021)** **Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ** *Ημερομηνία: 28/2/2021* *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Τα μέτρα των πλευρών αμβλυγώνιου τριγώνου είναι διαδοχικοί περιττοί φυσικοί αριθμοί.
Να βρείτε το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας του τριγώνου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Έστω $2\nu-1, 2\nu+1, 2\nu+3$ με $\nu \in \mathbb{N}$ τα μέτρα των τριών πλευρών του τριγώνου. Τότε η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία του φ. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{(2\nu-1)^2+(2\nu+1)^2-(2\nu+3)^2}{2(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{4\nu^2-12\nu-7}{2(4\nu^2-1)} : \quad (1)$$

Επειδή η γωνία φ είναι αμβλεία, είναι

$$\begin{aligned} -1 < \sigma\upsilon\nu\varphi < 0 &\overset{(1)}{\Rightarrow} -1 < \frac{4\nu^2-12\nu-7}{2(4\nu^2-1)} < 0 \\ &\Rightarrow -2(4\nu^2-1) < 4\nu^2-12\nu-7 < 0 \\ &\Rightarrow -8\nu^2+2 < 4\nu^2-12\nu-7 < 0 \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{cases} 4\nu^2-4\nu-3>0 \\ 4\nu^2-12\nu-7<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu > \dfrac{3}{2} \\ 0 < \nu < \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} < \nu < \frac{7}{2} \overset{\nu\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} \nu \in \{2,3\}$$

Έτσι από την (1) παίρνουμε

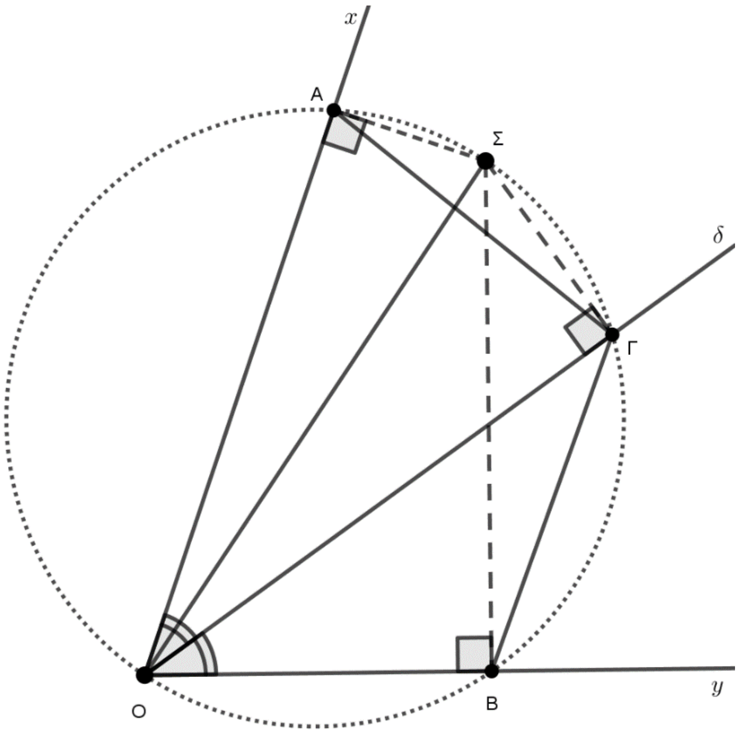
$\boxed{\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2}}$, για $\nu = 2$ ή $\boxed{\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{10}}$, για $\nu = 3$

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε οξεία γωνία $\angle xOy$, τη διχοτόμο της $O\delta$ και σημείο Σ, εσωτερικό της γωνίας, το οποίο δεν βρίσκεται στη διχοτόμο $O\delta$. Από το Σ φέρουμε $\Sigma A, \Sigma B$ και $\Sigma\Gamma$ κάθετες στις πλευρές Ox, Oy και στη διχοτόμο $O\delta$, αντίστοιχα (A σημείο της Ox, B σημείο της Oy και Γ σημείο της $O\delta$).

Να αποδείξετε ότι $\Gamma A = \Gamma B$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 1:

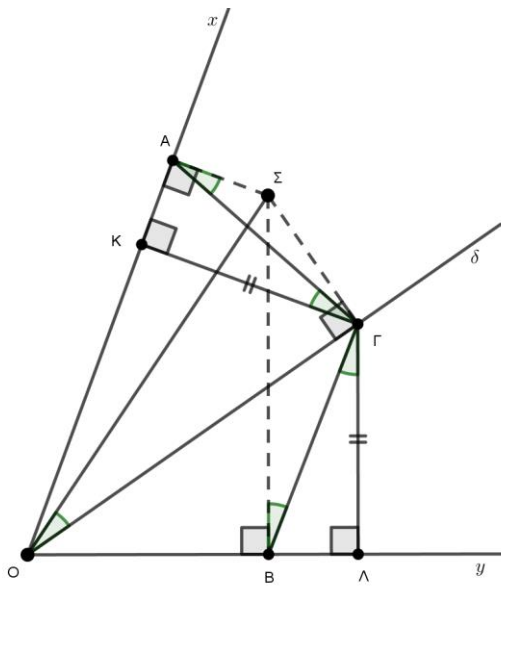


Παρατηρούμε ότι τα σημεία A, B, Γ ανήκουν στο κύκλο διαμέτρου $O\Sigma$, αφού το $O\Sigma$ φαίνεται και από τα τρία σημεία υπό ορθή γωνία.

Στον κύκλο αυτό οι γωνίες $\angle xO\delta$ και $\angle yO\delta$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα τόξα $\widehat{\Gamma A}$ και $\widehat{\Gamma B}$ αντίστοιχα.

Επειδή η $O\delta$ είναι διχοτόμος της xOy, είναι $\angle xO\delta = \angle yO\delta$, άρα και τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{\Gamma A}$ και $\widehat{\Gamma B}$ είναι ίσα και οι αντίστοιχες χορδές είναι επίσης ίσες. Συνεπώς $\Gamma A = \Gamma B$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 2:



Φέρουμε τις αποστάσεις $\Gamma K, \Gamma \Lambda$ του Γ από τις πλευρές της γωνίας. Επειδή το Γ είναι σημείο της διχοτόμου, είναι $\boldsymbol{\Gamma K = \Gamma \Lambda}$: $(\mathbf{1})$.

Το $A\Sigma\Gamma O$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο, αφού $\angle \Sigma A O + \angle \Sigma\Gamma O = 180^0$. Άρα $\angle \Sigma A \Gamma = \angle \Sigma O \Gamma$.

Όμως $\Sigma A \parallel \Gamma K \Longrightarrow \angle A\Gamma K = \angle \Sigma A \Gamma$

Από τα πιο πάνω, παίρνουμε $\angle A\Gamma K = \angle \Sigma O \Gamma$: (2)

Το $\Sigma\Gamma B O$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο, αφού $\angle \Sigma\Gamma O = \angle \Sigma B O = 90^0$. Άρα $\angle \Sigma B \Gamma = \angle \Sigma O \Gamma$.

Όμως, $\Sigma B \parallel \Gamma \Lambda \Longrightarrow \angle B\Gamma\Lambda = \angle \Sigma B \Gamma$

Από τα πιο πάνω, παίρνουμε $\angle B\Gamma\Lambda = \angle \Sigma O \Gamma$: (3)

Από τις $(2), (3)$ προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\angle A\Gamma K = \angle B\Gamma\Lambda} : \ (\mathbf{4})$$

Τέλος, από τις (1) και (4) συμπεραίνουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle A\Gamma K, \triangle B\Gamma\Lambda$ είναι ίσα, απ' όπου έχουμε ότι $\Gamma A = \Gamma B$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ που είναι πρώτοι και ικανοποιούν την εξίσωση

$$\alpha^3 - 7\beta^3 + 18\gamma - \alpha - 2\delta = 256 \quad (1)$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

Παρατηρούμε ότι $\alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha^2 - 1) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)$.

Ο ένας εκ των αριθμών $\{\alpha, \alpha + 1\}$ είναι άρτιος (και ο άλλος περιττός), άρα το γινόμενο τους $\alpha(\alpha + 1)$ είναι άρτιος αριθμός και επομένως ο αριθμός $\alpha^3 - \alpha$ είναι άρτιος.

Επίσης ένας εκ των τριών διαδοχικών αριθμών $\{\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1\}$ όταν διαιρεθεί με το 3 αφήνει υπόλοιπο 0 (και οι άλλοι δύο αφήνουν υπόλοιπα 1 και 2).

Επομένως το γινόμενο τους $\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) = \alpha^3 - \alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι ο αριθμός $\alpha^3 - \alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 6.

Έστω $\alpha^3 - \alpha = 6\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$6\kappa + 18\gamma - 2\delta - 256 = 7\beta^3$$
$$\Leftrightarrow \; 2(3\kappa + 9\gamma - \delta - 128) = 7\beta^3 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι το $7\beta^3$ είναι άρτιος, έτσι το β είναι άρτιος και επειδή είναι και πρώτος βρίσκουμε ότι $\beta = 2$. Η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\Leftrightarrow \; 2(3\kappa + 9\gamma - \delta - 128) = 56$$
$$\Leftrightarrow 3\kappa + 9\gamma - \delta = 156$$
$$\Leftrightarrow \delta = 3\kappa + 9\gamma - 156$$
$$\Leftrightarrow \delta = 3(\kappa + 3\gamma - 52) \quad (3)$$

Εφόσον το δ είναι πρώτος αριθμός η εξίσωση (3) δίνει ότι $\delta = 3$ και γίνεται:

$$\kappa + 3\gamma - 52 = 1$$
$$\Leftrightarrow \kappa + 3\gamma = 53$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^3 - \alpha}{6} + 3\gamma = 53$$
$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{53 - \frac{\alpha^3 - \alpha}{6}}{3} \quad (4)$$

Επειδή τα α και γ είναι πρώτοι αριθμοί έχουμε συνολικά 4 περιπτώσεις:

- $\alpha = 2 \Rightarrow \gamma = \frac{52}{3}$ απορρίπτεται
- $\alpha = 3 \Rightarrow \gamma = \frac{49}{3}$ απορρίπτεται
- $\alpha = 5 \Rightarrow \gamma = 11$ δεκτή
- $\alpha \geq 7 \Rightarrow \gamma \leq -1$ απορρίπτονται

Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι η μόνη λύση της εξίσωσης $\alpha^3 - 7\beta^3 + 18\gamma - \alpha - 2\delta = 256$ με τα α, β, γ και δ να είναι πρώτοι αριθμοί είναι:

$$\alpha = 5, \beta = 2, \gamma = 11 \text{ και } \delta = 3.$$

Πρόβλημα 4

Η συνάρτηση $f\colon A \longrightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ με $f(x) = x^2 - 2x$ είναι «επι» και δεν είναι αντιστρέψιμη. Να βρείτε το πλήθος των πιθανών πεδίων ορισμού A της f.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

Για να είναι «επι» η συνάρτηση f πρέπει $f(A) = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$.
Οι τιμές του $x \in A$ πρέπει να είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \{-1, 0, 1, 2, \dots, 10\}$.

$$f(x) = \kappa \Leftrightarrow x^2 - 2x - \kappa = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \kappa + 1 \quad (1)$$

Για $\kappa = -1$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση το $x = 1$ και επομένως το $1 \in A$.
Για $\kappa = 0,1,2, \dots, 10$ η εξίσωση (1) έχει 2 πραγματικές άνισες λύσεις τις:

$$\alpha_\kappa = 1 + \sqrt{\kappa + 1} \text{ και } \beta_\kappa = 1 - \sqrt{\kappa + 1}$$

Χωρίς τον περιορισμό « η συνάρτηση δεν είναι αντιστρέψιμη », για κάθε $\kappa = 0,1,2, \dots, 10$ θα πρέπει να ισχύει ένα από τα πιο κάτω:

- $\alpha_\kappa \in A$ και $\beta_\kappa \notin A$
- $\alpha_\kappa \notin A$ και $\beta_\kappa \in A$
- $\alpha_\kappa \in A$ και $\beta_\kappa \in A$

Σε αυτή την περίπτωση της συνάρτησης f υπάρχουν συνολικά 3^{11} πιθανά πεδία ορισμού.

Με τον περιορισμό « η συνάρτηση είναι ένα προς ένα », για κάθε $\kappa = 0,1,2, \dots, 10$ θα πρέπει να ισχύει ένα από τα πιο κάτω:

- $\alpha_\kappa \in A$ και $\beta_\kappa \notin A$
- $\alpha_\kappa \notin A$ και $\beta_\kappa \in A$

Άρα αν η συνάρτηση f είναι 1 – 1, τότε το πλήθος των πιθανών πεδίων ορισμού της είναι 2^{11}.

Τώρα επειδή η f είναι «επί» και δεν είναι αντιστρέψιμη συνεπάγεται ότι δεν είναι 1 – 1, έτσι με βάση τα πιο πάνω, το πλήθος των πιθανών πεδίων ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$3^{11} - 2^{11} = 175099$$