



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2025

«Β' Λυκείου»

Ημερομηνία: 8/11/2025 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

Οδηγίες

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Με τον συμβολισμό $\overline{xyw}$ θεωρούμε ότι ο αριθμός xyw βρίσκεται σε δεκαδική αναπαράσταση, δηλαδή $\overline{xyw} = 100x + 10y + w$. Να υπολογίσετε όλα τα αθροίσματα της μορφής

$$S = \overline{4\alpha 5} + \overline{2\beta 7} + \overline{1\gamma 4}$$

τα οποία διαιρούνται με το 9.

Προτεινόμενη Λύση

Το άθροισμα S γράφεται:

$$S = \overline{4\alpha 5} + \overline{2\beta 7} + \overline{1\gamma 4} = (4 \cdot 10^2 + \alpha \cdot 10 + 5) + (2 \cdot 10^2 + \beta \cdot 10 + 7) + (1 \cdot 10^2 + \gamma \cdot 10 + 4)$$

ή διαφορετικά

$$S = 7 \cdot 10^2 + 10(\alpha + \beta + \gamma) + 16 = 10(\alpha + \beta + \gamma) + 716$$

Επομένως παίρνουμε

$$S = 9(\alpha + \beta + \gamma + 79) + (\alpha + \beta + \gamma + 5)$$

Επειδή, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ θα ισχύει

$$0 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 27$$

Άρα για να διαιρείται το S με το 9 θα πρέπει το $\alpha + \beta + \gamma + 5$ να διαιρείται με το 9. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

✓ Αν $\alpha + \beta + \gamma = 4$ τότε το $9|S$ και παίρνουμε

$$S = 9(4 + 79) + (4 + 5) = 756$$

✓ Αν $\alpha + \beta + \gamma = 13$ τότε το $9|S$ και παίρνουμε

$$S = 9(13 + 79) + (13 + 5) = 846$$

✓ Αν $\alpha + \beta + \gamma = 22$ τότε το $9|S$ και παίρνουμε

$$S = 9(22 + 79) + (22 + 5) = 936$$

Πρόβλημα 2. i. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 5$ ισχύει

$$2^\nu > \nu^2$$

ii. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$2^\nu - 17 = \nu^2 - 6\nu$$

Προτεινόμενη Λύση

i. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής.

Για $\nu = 5$, θα έχουμε $2^5 > 5^2$ δηλαδή $32 > 25$ που ισχύει.

Έστω ότι η δεδομένη ανισότητα ισχύει για $\nu = k$ όπου k φυσικός αριθμός με $k > 5$, δηλαδή

$$2^k > k^2 \tag{1}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ανισότητα ισχύει και για $\nu = k + 1$ δηλαδή

$$2^{k+1} > (k+1)^2 \tag{2}$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την (1) το πρώτο μέλος της (2) γίνεται

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k^2 \cdot 2 = k^2 + k^2$$

Όμως έχουμε ότι

$$k^2 > 2k + 1 \iff k^2 - 2k + 1 > 2 \iff (k-1)^2 > 2$$

που ισχύει για κάθε $k > 5$.

Επομένως θα έχουμε

$$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Επομένως η ανισότητα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 5$.

ii. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του πρώτου μέρους θα έχουμε με $\nu \geq 5$ για την δεδομένη εξίσωση

$$2^\nu - 17 > \nu^2 - 17 > \nu^2 - 6\nu$$

Επομένως για $\nu \geq 5$ δεν ισχύει η εξίσωση. Ελέγχουμε τις τιμές $\nu = 1, 2, 3, 4$ και παίρνουμε:

- Για $\nu = 1$ θα έχουμε

$$2 - 17 = 1 - 6 \iff -15 = -5$$

που είναι άτοπο.

- Για $\nu = 2$ θα έχουμε

$$2^2 - 17 = 2^2 - 6 \cdot 2 \iff -12 = -8$$

που είναι άτοπο.

- Για $\nu = 3$ θα έχουμε

$$2^3 - 17 = 3^2 - 6 \cdot 3 \iff -9 = -9$$

Άρα $\nu = 3$ είναι λύση.

- Για $\nu = 4$ θα έχουμε

$$2^4 - 17 = 4^2 - 6 \cdot 4 \iff -1 = -8$$

που είναι άτοπο.

Επομένως μοναδική λύση της εξίσωσης είναι $\nu = 3$.

Πρόβλημα 3. Αν σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ισχύει

$$\eta\mu^2(B - 27^\circ) - \eta\mu^2(A - 55^\circ) = 1$$

να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

Προτεινόμενη Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\eta\mu^2(B - 27^\circ) - \eta\mu^2(A - 55^\circ) = \eta\mu^2(B - 27^\circ) + \sigma\upsilon\nu^2(B - 27^\circ)$$

η διαφορετικά

$$\eta\mu^2(A - 55^\circ) + \sigma\upsilon\nu^2(B - 27^\circ) = 0$$

Επομένως έχουμε,

- $\eta\mu(A - 55^\circ) = 0$ και
- $\sigma\upsilon\nu(B - 27^\circ) = 0$

Επειδή A και B είναι γωνίες τριγώνου, θα πάρουμε

$$\square \eta\mu(A - 55^\circ) = 0 \implies \eta\mu(A - 55^\circ) = \eta\mu 0^\circ \implies A = 55^\circ$$

$$\square \sigma\upsilon\nu(B - 27^\circ) = 0 \implies \sigma\upsilon\nu(B - 27^\circ) = \sigma\upsilon\nu 90^\circ \implies B = 117^\circ$$

Επομένως έχουμε

$$\Gamma = 180^\circ - (55^\circ + 117^\circ) \implies \Gamma = 8^\circ$$

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και Δ το μέσο του $B\Gamma$. Πάνω στην διάμεσο $A\Delta$ παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $\frac{AE}{A\Delta} = \frac{1}{3}$. Η προέκταση της ΓE τέμνει την AB στο K . Αν $AK = \frac{3}{2}$ να υπολογίσετε το μήκος του AB .

1^η Προτεινόμενη Λύση

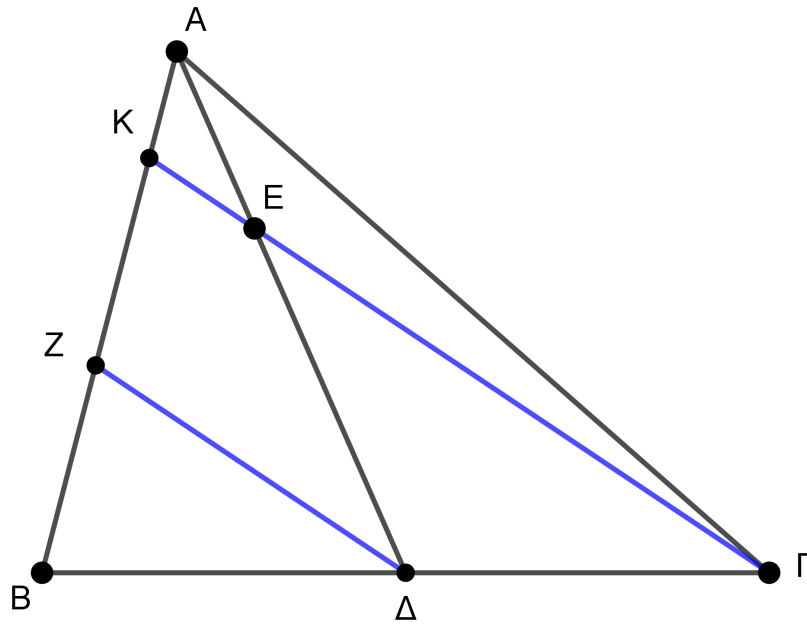
Από το μέσο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΓK και έστω Z το σημείο τομής της με την ευθεία AB .

Από την υπόθεση έχουμε

$$\frac{AE}{A\Delta} = \frac{1}{3} \implies E\Delta = 2AE$$

Επειδή $KE \parallel \Delta Z$ από το Θεώρημα του Θαλή θα πάρουμε

$$\frac{AK}{KZ} = \frac{AE}{E\Delta} = \frac{1}{2} \implies KZ = 2AK$$



Επίσης, αφού $K\Gamma \parallel \Delta Z$ από το Θεώρημα του Θαλή θα πάρουμε

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BZ}{ZK} = 1 \Rightarrow BZ = KZ$$

Άρα

$$AB = AK + KZ + BZ = AK + 2AK + 2AK = 5AK \Rightarrow AB = \frac{15}{2}cm$$

2^η Προτεινόμενη Λύση

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $AB\Delta$ με διατέμνουσα την ευθεία $(KE\Gamma)$ θα έχουμε

$$\frac{KA}{KB} \cdot \frac{\Gamma B}{\Gamma \Delta} \cdot \frac{E\Delta}{EA} = 1$$

και από τα δεδομένα του προβλήματος παίρνουμε

$$\frac{KA}{KB} \cdot \frac{2\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} \cdot \frac{2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{1}{4}$$

Επομένως έχουμε

$$\frac{KA}{AB} = \frac{1}{5} \Rightarrow AB = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}cm$$