Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2026

«Β′ Λυκείου»

Ημερομηνία: 7/11/2026 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

Οδηγιες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Πρόβλημα 1. i. Ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται *παράξενος* εάν είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από ένα τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 3^4+4 μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο παράξενων αριθμών.
Σημείωση: Για παράδειγμα, ο αριθμός $10=9+1$ είναι παράξενος, αφού ο $9=3^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $\nu \geqslant 2$ ο αριθμός ν^4+4 δεν είναι πρώτος.

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(2026^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(2028^4+4)}.$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

i. Να αποδείξετε ότι

$$\text{συν}(A+B)\cdot\text{συν}(A-B)=\frac{1}{2}\left(\text{συν}\,2A+\text{συν}\,2B\right).$$

ii. Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\Gamma\neq 90^\circ$, ισχύει

$$\frac{\eta\mu\, B}{\text{συν}\,\Gamma}=\eta\mu\, A+\text{συν}\, A\cdot\text{σφ}\, B,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Πρόβλημα 3. Για κάθε θετικό ακέραιο ν θεωρούμε τον αριθμό

$$A_\nu=7^{2\nu+1}+5^{2\nu-1}-12.$$

i. Να αποδείξετε ότι ο A_ν είναι πολλαπλάσιο του 24 για κάθε θετικό ακέραιο ν.

ii. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους ν για τους οποίους ο A_ν είναι πολλαπλάσιο του 48.

Πρόβλημα 4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με οξεία γωνία A. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε τις κάθετες ΓE και ΓZ προς τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Delta$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $AB\cdot AE+A\Delta\cdot AZ=A\Gamma^2$.

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OEZ είναι ισοσκελές.

iii. Να βρείτε για ποια τιμή της γωνίας A το τρίγωνο OEZ είναι ισόπλευρο.