Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2026

«Β′ Λυκείου»

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ημερομηνία: 7/11/2026 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

Πρόβλημα 1. i. Ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται *παράξενος* εάν είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από ένα τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 3^4+4 μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο παράξενων αριθμών.
Σημείωση: Για παράδειγμα, ο αριθμός $10=9+1$ είναι παράξενος, αφού ο $9=3^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $\nu \geqslant 2$ ο αριθμός ν^4+4 δεν είναι πρώτος.

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(2026^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(2028^4+4)}.$$

Λύση.

(i) Έχουμε

$$3^4+4=85=5\cdot 17=\left(2^2+1\right)\left(4^2+1\right),$$

και οι αριθμοί $5=2^2+1$ και $17=4^2+1$ είναι παράξενοι. Παρατηρούμε ότι $2=3-1$ και $4=3+1$, δηλαδή

$$3^4+4=\left[(3-1)^2+1\right]\left[(3+1)^2+1\right].$$

(ii) Το (i) υποδεικνύει την παραγοντοποίηση: για κάθε πραγματικό x ισχύει

$$\begin{aligned} x^4+4&=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right)\\ &=\left[(x-1)^2+1\right]\left[(x+1)^2+1\right]. \end{aligned} \qquad (*)$$

Έστω ακέραιος $\nu \geqslant 2$. Από την $(*)$,

$$\nu^4+4=\left[(\nu-1)^2+1\right]\left[(\nu+1)^2+1\right].$$

Οι δύο παράγοντες είναι θετικοί ακέραιοι και, αφού $\nu \geqslant 2$, έχουμε $(\nu-1)^2+1 \geqslant 2$ και $(\nu+1)^2+1 \geqslant 10$. Επομένως ο ν^4+4 γράφεται ως γινόμενο δύο ακεραίων μεγαλύτερων του 1, άρα δεν είναι πρώτος.

(Για $\nu=1$ ο πρώτος παράγοντας ισούται με 1 και πράγματι ο $1^4+4=5$ είναι πρώτος.)

(iii) Θέτουμε $g(m)=m^2+1$. Από την $(*)$, για κάθε ακέραιο κ ισχύει $\kappa^4+4=g(\kappa-1)\,g(\kappa+1)$. Επομένως

$$(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(2026^4+4)=g(1)g(3)\cdot g(5)g(7)\cdot g(9)g(11)\cdots g(2025)g(2027),$$
$$(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(2028^4+4)=g(3)g(5)\cdot g(7)g(9)\cdot g(11)g(13)\cdots g(2027)g(2029).$$

Ο αριθμητής είναι το γινόμενο των $g(m)$ για όλους τους περιττούς m από 1 μέχρι 2027, ενώ ο παρονομαστής το γινόμενο των $g(m)$ για όλους τους περιττούς m από 3 μέχρι 2029. Μετά τις απλοποιήσεις μένει

$$A=\frac{g(1)}{g(2029)}=\frac{2}{2029^2+1}=\frac{2}{4116842}=\frac{1}{2058421}.$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

i. Να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu(A+B)\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)=\frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,2A+\sigma\upsilon\nu\,2B\right).$$

ii. Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\Gamma\neq 90^\circ$, ισχύει

$$\frac{\eta\mu\,B}{\sigma\upsilon\nu\,\Gamma}=\eta\mu\,A+\sigma\upsilon\nu\,A\cdot\sigma\varphi\,B,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Λύση. Ισχύει $A+B+\Gamma=180^\circ$, άρα $\sigma\upsilon\nu\,\Gamma=-\sigma\upsilon\nu(A+B)$.

(i) Από τους τύπους της πρόσθεσης,

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(A+B)\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)&=(\sigma\upsilon\nu\,A\,\sigma\upsilon\nu\,B-\eta\mu\,A\,\eta\mu\,B)\,(\sigma\upsilon\nu\,A\,\sigma\upsilon\nu\,B+\eta\mu\,A\,\eta\mu\,B)\\&=\sigma\upsilon\nu^2\,A\;\sigma\upsilon\nu^2\,B-\eta\mu^2\,A\;\eta\mu^2\,B.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\sigma\upsilon\nu^2\,B=1-\eta\mu^2\,B$ και $\eta\mu^2\,A=1-\sigma\upsilon\nu^2\,A$:

$$\sigma\upsilon\nu^2\,A\left(1-\eta\mu^2\,B\right)-\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\,A\right)\eta\mu^2\,B=\sigma\upsilon\nu^2\,A-\eta\mu^2\,B.$$

Από την άλλη, αφού $\sigma\upsilon\nu\,2A=2\,\sigma\upsilon\nu^2\,A-1$ και $\sigma\upsilon\nu\,2B=1-2\,\eta\mu^2\,B$,

$$\frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,2A+\sigma\upsilon\nu\,2B\right)=\frac{1}{2}\left(2\,\sigma\upsilon\nu^2\,A-2\,\eta\mu^2\,B\right)=\sigma\upsilon\nu^2\,A-\eta\mu^2\,B.$$

Άρα τα δύο μέλη είναι ίσα.

(ii) Αφού $\Gamma\neq 90^\circ$, ισχύει $\sigma\upsilon\nu\,\Gamma\neq 0$. Επίσης $\eta\mu\,B\neq 0$, οπότε όλα τα κλάσματα ορίζονται. Αφού $\sigma\varphi\,B=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\,B}{\eta\mu\,B}$, το δεξί μέλος γράφεται

$$\eta\mu\,A+\sigma\upsilon\nu\,A\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\,B}{\eta\mu\,B}=\frac{\eta\mu\,A\,\eta\mu\,B+\sigma\upsilon\nu\,A\,\sigma\upsilon\nu\,B}{\eta\mu\,B}=\frac{\sigma\upsilon\nu(A-B)}{\eta\mu\,B}.$$

Η δοσμένη σχέση γίνεται λοιπόν

$$\frac{\eta\mu\,B}{\sigma\upsilon\nu\,\Gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu(A-B)}{\eta\mu\,B}\iff\eta\mu^2\,B=\sigma\upsilon\nu\,\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)=-\sigma\upsilon\nu(A+B)\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B).$$

Από το (i) και τον τύπο $\eta\mu^2\,B=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,2B}{2}$ παίρνουμε

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,2B}{2}=-\frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,2A+\sigma\upsilon\nu\,2B\right)\iff 1=-\sigma\upsilon\nu\,2A\iff\sigma\upsilon\nu\,2A=-1.$$

Αφού $0^\circ<2A<360^\circ$, έπεται ότι $2A=180^\circ$, δηλαδή $A=90^\circ$. Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A.

(Αντίστροφα, αν $A=90^\circ$ τότε $\sigma\upsilon\nu\,\Gamma=\eta\mu\,B$, οπότε και τα δύο μέλη της σχέσης ισούνται με 1.)

Πρόβλημα 3. Για κάθε θετικό ακέραιο ν θεωρούμε τον αριθμό

$$A_\nu = 7^{2\nu+1} + 5^{2\nu-1} - 12.$$

i. Να αποδείξετε ότι ο A_ν είναι πολλαπλάσιο του 24 για κάθε θετικό ακέραιο ν.
ii. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους ν για τους οποίους ο A_ν είναι πολλαπλάσιο του 48.

Λύση. Έχουμε $A_1 = 7^3 + 5 - 12 = 336 = 24 \cdot 14$. Βρίσκουμε μια σχέση ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς όρους:

$$\begin{aligned} A_{\nu+1} &= 49 \cdot 7^{2\nu+1} + 25 \cdot 5^{2\nu-1} - 12 \\ &= 25\left(7^{2\nu+1} + 5^{2\nu-1} - 12\right) + 24 \cdot 7^{2\nu+1} + 288 \\ &= 25A_\nu + 24\left(7^{2\nu+1} + 12\right). \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Με επαγωγή στο ν. Για $\nu = 1$, $A_1 = 24 \cdot 14$. Αν $24 \mid A_\nu$, τότε από την (1) και οι δύο προσθετέοι $25A_\nu$ και $24\left(7^{2\nu+1} + 12\right)$ είναι πολλαπλάσια του 24, άρα $24 \mid A_{\nu+1}$.

(ii) Από το (i) γράφουμε $A_\nu = 24s_\nu$, όπου s_ν θετικός ακέραιος. Τότε ο A_ν είναι πολλαπλάσιο του 48 αν και μόνο αν ο s_ν είναι άρτιος.

Από την (1),

$$A_{\nu+1} - A_\nu = 24A_\nu + 24\left(7^{2\nu+1} + 12\right) = 24\left(A_\nu + 7^{2\nu+1} + 12\right),$$

δηλαδή

$$s_{\nu+1} - s_\nu = A_\nu + 7^{2\nu+1} + 12.$$

Ο A_ν είναι άρτιος (από το (i)), ο $7^{2\nu+1}$ περιττός και ο 12 άρτιος, οπότε ο $s_{\nu+1} - s_\nu$ είναι περιττός. Άρα οι s_ν και $s_{\nu+1}$ έχουν πάντοτε διαφορετική αρτιότητα. Αφού $s_1 = 14$ είναι άρτιος, έπεται ότι οι $s_1, s_3, s_5, \ldots$ είναι άρτιοι και οι $s_2, s_4, s_6, \ldots$ περιττοί.

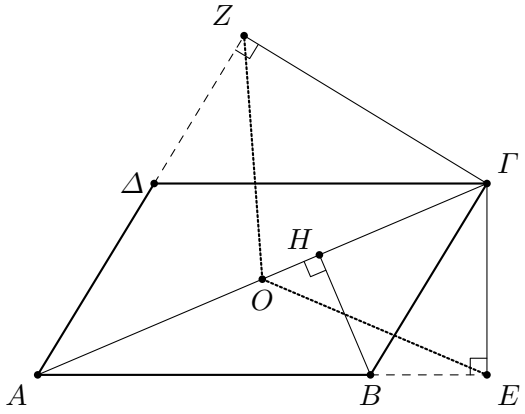
Απάντηση: ο A_ν είναι πολλαπλάσιο του 48 ακριβώς όταν ο ν είναι περιττός.

(Έλεγχος: $A_1 = 336 = 48 \cdot 7$, *ενώ* $A_2 = 16920 = 48 \cdot 352 + 24$.*)*

(Εναλλακτικά, με ισοτιμίες: $49 \equiv 1 \pmod{16}$ *και* $25^2 = 625 \equiv 1 \pmod{16}$, *οπότε* $A_\nu \equiv 7 + 5 \cdot 25^{\nu-1} - 12 \pmod{16}$, *που ισούται με* 0 *για* ν *περιττό και με* 8 *για* ν *άρτιο. Επίσης* $A_\nu \equiv 1 + 2 - 0 \equiv 0 \pmod{3}$ *για κάθε* ν.*)*

Πρόβλημα 4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με οξεία γωνία A. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε τις κάθετες ΓE και ΓZ προς τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Delta$ αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $AB \cdot AE + A\Delta \cdot AZ = A\Gamma^2$.
ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OEZ είναι ισοσκελές.
iii. Να βρείτε για ποια τιμή της γωνίας A το τρίγωνο OEZ είναι ισόπλευρο.



(i) Φέρουμε από την κορυφή B την κάθετη BH προς τη διαγώνιο $A\Gamma$. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\angle AB\Gamma = 180^\circ - \angle A$ είναι αμβλεία, άρα οι γωνίες του στα A και Γ είναι οξείες. Επομένως το H βρίσκεται στο εσωτερικό του τμήματος $A\Gamma$, οπότε

$$AH + H\Gamma = A\Gamma. \tag{1}$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ABH (με $\angle AHB = 90^\circ$) και $A\Gamma E$ (με $\angle AE\Gamma = 90^\circ$) έχουν κοινή την οξεία γωνία $\angle BAH = \angle \Gamma AE$. Άρα είναι όμοια, οπότε

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AH}{AE} \iff AB \cdot AE = A\Gamma \cdot AH. \tag{2}$$

Επίσης, αφού $A\Delta \parallel B\Gamma$, οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες:

$$\angle H\Gamma B = \angle A\Gamma B = \angle \Gamma A\Delta = \angle \Gamma AZ.$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΓBH (με $\angle \Gamma HB = 90^\circ$) και $A\Gamma Z$ (με $\angle AZ\Gamma = 90^\circ$) είναι όμοια, οπότε

$$\frac{\Gamma B}{A\Gamma} = \frac{\Gamma H}{AZ} \iff A\Gamma \cdot \Gamma H = AZ \cdot B\Gamma = AZ \cdot A\Delta, \tag{3}$$

αφού $B\Gamma = A\Delta$. Προσθέτοντας τις (2) και (3) και χρησιμοποιώντας την (1):

$$AB \cdot AE + A\Delta \cdot AZ = A\Gamma \cdot (AH + H\Gamma) = A\Gamma^2.$$

(Εναλλακτικά, με τριγωνομετρία: $AE = A\Gamma$ συν$\angle \Gamma AB$ και $AZ = A\Gamma$ συν$\angle \Gamma A\Delta$, οπότε το αριστερό μέλος ισούται με $A\Gamma\,(AB$ συν$\angle \Gamma AB + B\Gamma$ συν$\angle A\Gamma B)$. Η παρένθεση είναι το άθροισμα των προβολών των AB και $B\Gamma$ πάνω στην $A\Gamma$, δηλαδή ίση με $A\Gamma$.)

(ii) Το O είναι το μέσο της $A\Gamma$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Gamma$ η EO είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $OE = \frac{A\Gamma}{2}$. Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Gamma$ έχουμε $OZ = \frac{A\Gamma}{2}$. Επομένως

$$OE = OZ = OA = O\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$$

και το τρίγωνο OEZ είναι ισοσκελές.

(iii) Το τρίγωνο OAE είναι ισοσκελές ($OA = OE$), οπότε $\angle OEA = \angle OAE = \angle \Gamma AB$. Η $\angle EO\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου OAE, άρα

$$\angle EO\Gamma = \angle OAE + \angle OEA = 2\angle \Gamma AB.$$

Ομοίως, από το ισοσκελές τρίγωνο OAZ παίρνουμε $\angle ZO\Gamma = 2\angle \Gamma A\Delta$. Τα σημεία E και Z βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία $A\Gamma$ (όπως και τα B, Δ), και $2\angle \Gamma AB + 2\angle \Gamma A\Delta = 2\angle A < 180^\circ$. Επομένως

$$\angle EOZ = \angle EO\Gamma + \angle \Gamma OZ = 2\,(\angle \Gamma AB + \angle \Gamma A\Delta) = 2\angle A.$$

Το ισοσκελές τρίγωνο OEZ είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν $\angle EOZ = 60^\circ$, δηλαδή αν και μόνο αν $2\angle A = 60^\circ$. **Απάντηση:** $\angle A = 30^\circ$.

(Ισοδύναμα: τα σημεία A, E, Γ, Z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο O και διάμετρο $A\Gamma$, και η $\angle EOZ$ είναι η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στην εγγεγραμμένη $\angle EAZ = \angle A$. Από τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο AEZ έπεται επίσης ότι $EZ = A\Gamma \cdot$ ημ A.)