



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Β' Διαγωνισμός Επιλογής Λυκείου

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 03/04/2021 Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών (α, β) για τα οποία ισχύει

$$\delta^2 + 9\alpha\beta + 9\delta(\alpha + \beta) = 7\delta\alpha\beta$$

όπου δ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β .

Πρόβλημα 2. Εννέα μέλη μιας επιτροπής ψηφίζουν για να εκλέξουν πρόεδρο. Υπάρχουν τρεις υποψήφιοι πρόεδροι και κάθε μέλος της επιτροπής κατατάσσει τους υποψηφίους προέδρους σε μια σειρά δίνοντας 3 βαθμούς στην πρώτη επιλογή του, 2 βαθμούς στην δεύτερη επιλογή του και 1 βαθμό στην τρίτη στην σειρά επιλογή του.

Στο τέλος της ψηφοφορίας προστέθηκαν οι βαθμοί κάθε υποψηφίου και παρατηρήθηκε ότι κάθε υποψήφιος πήρε διαφορετικό σύνολο βαθμών και έτσι υπήρξε μια ξεκάθαρη τελική κατάταξη των υποψηφίων. Παρατηρήθηκε επίσης ότι αν το κάθε μέλος επέλεγε μόνο έναν υποψήφιο, την πρώτη του επιλογή, τότε η τελική κατάταξη των υποψηφίων θα ήταν με την αντίστροφη σειρά.

Να βρείτε την τελική βαθμολογία του κάθε υποψηφίου.

Πρόβλημα 3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και έστω M το μέσον του $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία I και K αντίστοιχα έτσι ώστε $AI = AK$. Αν O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\triangle AIK$ και Δ το ίχνος της κάθετης από το σημείο A πάνω στην $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle O\Delta M$ είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4. Αν α, β, γ , θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε

$$2\sqrt{\beta\gamma} + 8\sqrt{\alpha\gamma} + 21\sqrt{\alpha\beta} \leq 12$$

τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{3}{\sqrt{\gamma}}$$