



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Β' Διαγωνισμός Επιλογής κάτω των 15 1/2 Ετών

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 03/04/2021

Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Έστω θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z , τέτοιοι ώστε $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$xyz(x + y + z) + 2021 \geq 2024xyz$$

Πρόβλημα 2. Να βρείτε όλα τα ζεύγη φυσικών αριθμών (α, β) για τα οποία ισχύει

$$\delta + \Delta = 4(\alpha + \beta) + 2021$$

όπου δ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β και Δ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β .

Πρόβλημα 3. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$.

- (α) Να αποδείξετε ότι μπορείτε να κατασκευάσετε ένα κύκλο (c) που να είναι εγγεγραμμένος στον ρόμβο και να εφάπτεται των πλευρών του.
- (β) Τα σημεία Θ, H, K, I βρίσκονται πάνω στις πλευρές $\Delta\Gamma, B\Gamma, AB, A\Delta$ του ρόμβου αντίστοιχα, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα KH και $I\Theta$ να είναι εφαπτόμενα στον κύκλο (c) . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζεται από τα σημεία Θ, H, K, I είναι τραπέζιο.

Πρόβλημα 4. Χρωματίζουμε κάθε τετραγωνάκι μιας 4×19 σκακιέρας με ένα από τα χρώματα κόκκινο, πράσινο και μπλε. Να αποδείξετε πως όπως και να γίνει αυτός ο χρωματισμός, μπορούμε να βρούμε δυο οριζόντιες σειρές και δυο κάθετες στήλες, ώστε τα 4 τετραγωνάκια που βρίσκονται στις τομές αυτών των δύο σειρών και των δύο στηλών να έχουν όλα το ίδιο χρώμα.