ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 28/02/2021 *Ώρα Εξέτασης: 09:30 - 12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς ν (θετικούς ή αρνητικούς) για τους οποίους η παράσταση $\frac{5\nu+34}{\nu-7}$ να είναι ακέραιος αριθμός.

Προτεινόμενη Λύση

Αφού

$$\frac{5\nu+34}{\nu-7}=\frac{5(\nu-7)+69}{\nu-7}=5+\frac{69}{\nu-7}$$

Τότε πρέπει να βρούμε όλους τους ακεραίους ν για τους οποίους ο $\nu-7$ είναι διαιρέτης του 69 (θετικός ή αρνητικός). Επειδή $69=3\cdot 23$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, οι διαιρέτες του 69 είναι οι $-69,-23,-3,-1,1,3,23,69$. Άρα οι τιμές που μπορεί να πάρει το ν είναι οι $-62,-16,4,6,8,10,30,76$.

Πρόβλημα 2

Αν $3x + 2y = \alpha$, $2x + 3y = \beta$ και $5(x + y)^2 = 3(x - y)^2$, να υπολογίσετε την τιμή του $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$.

Προτεινόμενη Λύση 1

Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y = \alpha \\ 2x + 3y = \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow x - y = \alpha - \beta$$

και

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y = \alpha \\ 2x + 3y = \beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5(x + y) = \alpha + \beta \Rightarrow x + y = \frac{\alpha + \beta}{5}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} 5(x + y)^2 = 3(x - y)^2 &\Rightarrow 5\left(\frac{\alpha + \beta}{5}\right)^2 = 3(\alpha - \beta)^2 \\ &\Rightarrow \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{5} = 3(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 15\alpha^2 - 30\alpha\beta + 15\beta^2 \\ &\Rightarrow 14(\alpha^2 + \beta^2) = 32\alpha\beta \\ &\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{32}{14} = \frac{16}{7} \end{aligned}$$

Προτεινόμενη Λύση 2

Έχουμε

$$\begin{aligned} 5(x + y)^2 = 3(x - y)^2 &\Rightarrow 5x^2 + 10xy + 5y^2 = 3x^2 - 6xy + 3y^2 \\ &\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = -16xy \Rightarrow x^2 + y^2 = -8xy \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} &= \frac{(2x + 3y)^2 + (3x + 2y)^2}{(3x + 2y)(2x + 3y)} \\ &= \frac{(4x^2 + 12xy + 9y^2) + (9x^2 + 12xy + 4y^2)}{6x^2 + 9xy + 4xy + 6y^2} \\ &= \frac{13(x^2 + y^2) \ + 24xy}{6(x^2 + y^2) + 13xy} \\ &= \frac{(13 \cdot (-8) + 24)xy}{(6 \cdot (-8) + 13)xy} = \frac{-80}{-35} = \frac{16}{7} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

Να παραγοντοποιήσετε το $x(x + 3)(x + 6)(x + 9) + 81$.

Προτεινόμενη Λύση

Έχουμε

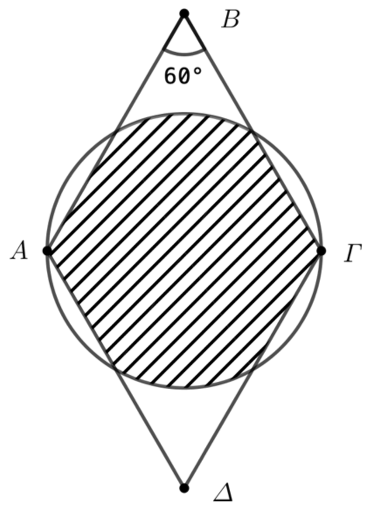
$$x(x + 3)(x + 6)(x + 9) = [x(x + 9)][(x + 3)(x + 6)] = (x^2 + 9x)(x^2 + 9x + 18)$$

Θέτουμε $y = x^2 + 9x + 9$. Τότε

$$x(x + 3)(x + 6)(x + 9) + 81 = (y - 9)(y + 9) + 81 = y^2 - 81 + 81 = y^2 = (x^2 + 9x + 9)^2$$

Πρόβλημα 4

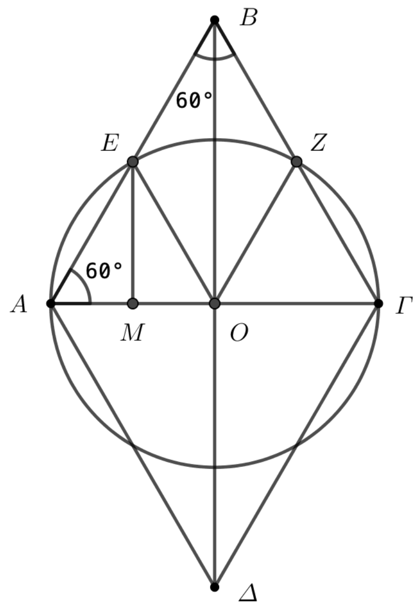
Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος με πλευρά μήκους $4\ \mathrm{cm}$ και ο κύκλος έχει διάμετρο την $ΑΓ$. Αν $Α\hat{Β}Γ = 60^\circ$, να υπολογίσετε το σκιασμένο εμβαδόν.



Προτεινόμενη Λύση

Έστω O το σημείο τομής των $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται, άρα το O είναι το κέντρο του κύκλου.

Επειδή $ΑΒ = ΒΓ = 4\ \mathrm{cm}$ και $Α\hat{Β}Γ = 60^\circ$, τότε $Β\hat{Α}Γ = Γ\hat{Α}Β = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο, έχουμε $ΑΓ = 4\ \mathrm{cm}$ και ο κύκλος έχει ακτίνα $ΟΑ = 2\ \mathrm{cm}$.



Έστω $Ε, Ζ$ τα σημεία τομής του κύκλου με τις $ΑΒ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Επειδή $Ο\hat{Α}Ε = 60^\circ$ και $ΟΑ = ΑΕ = 2\ \mathrm{cm}$, τότε (όπως προηγουμένως) το τρίγωνο $ΟΑΕ$ είναι ισόπλευρο με πλευρά μήκους $2\ \mathrm{cm}$.

Έστω $Μ$ το μέσος της $ΟΑ$ τότε $ΟΜ = 1\ \mathrm{cm}$, $ΟΕ = 2\ \mathrm{cm}$ και η $ΕΜ$ είναι κάθετη στην $ΟΜ$. Άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$ΕΜ = \sqrt{ΟΕ^2 - ΟΜ^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}\ \mathrm{cm}.$$

Επομένως $E_{ΑΕΟ} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ και ομοίως $E_{ΓΟΖ} = \sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

Έχουμε επίσης ότι $Ε\hat{Ο}Ζ = 180^\circ - Α\hat{Ο}Ε - Γ\hat{Ο}Ζ = 60^\circ$. Άρα το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $ΕΟΖ$ ισούται με $\frac{\pi \cdot 2^2}{6} = \frac{2\pi}{3}$. Άρα το σκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με

$$2\left(\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right)\ \mathrm{cm}^2$$