



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2021

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/11/2021

Ώρα Εξέτασης: 15:00-17:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή του: $A = \frac{3+6+9+\dots+300}{2+4+6+\dots+200}$

(β) Αν $\alpha - \beta = (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^{101}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$\alpha) A = \frac{3+6+9+\dots+300}{2+4+6+\dots+200} = \frac{3(1+2+3+\dots+100)}{2(1+2+3+\dots+100)} = \frac{3}{2}$$

$$\beta) \alpha - \beta = (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) = \sqrt{3}^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^{101} = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + (\alpha - \beta)^{101} \\ &= (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^{101} \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\Gamma = (-1)^2 + (-1)^{101} = 1 - 1 = 0$$

Πρόβλημα 2

Ένα συνεργείο εργατών μπορεί να εκτελέσει ένα έργο σε 8 ημέρες, ενώ ένα δεύτερο συνεργείο μπορεί να εκτελέσει το ίδιο έργο σε 12 ημέρες. Τα δύο συνεργεία ξεκινούν να εργάζονται μαζί σ' αυτό το έργο για 3 ημέρες. Στη συνέχεια το 20% των εργατών από το πρώτο συνεργείο και το $x\%$ των εργατών από το δεύτερο συνεργείο αποχώρησαν και οι υπόλοιποι εργάτες ολοκλήρωσαν το έργο σε 3 ημέρες. Να βρείτε την τιμή του x .

Προτεινόμενη Λύση

Αρχικά, πριν αποχωρήσουν κάποιοι εργάτες

Σε 1 ημέρα:

Το 1^ο συνεργείο κάνει το $\frac{1}{8}$ του έργου.

Το 2^ο συνεργείο κάνει το $\frac{1}{12}$ του έργου.

Το 1^ο και το 2^ο συνεργείο μαζί κάνουν τα $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ του έργου.

Σε 3 ημέρες :

Το 1^ο και το 2^ο συνεργείο μαζί έκαναν τα $3 \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{8}$ του έργου και απέμειναν προς ολοκλήρωση τα $\frac{3}{8}$ του έργου. (1)

Μετά, που αποχώρησαν κάποιοι εργάτες

Σε 1 ημέρα:

Το 1^ο συνεργείο κάνει το $\frac{80}{100} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$ του έργου.

Το 2^ο συνεργείο κάνει το $\frac{100-x}{100} \cdot \frac{1}{12}$ του έργου.

Το 1^ο και το 2^ο συνεργείο μαζί κάνουν τα $\frac{1}{10} + \frac{100-x}{100} \cdot \frac{1}{12}$ του έργου.

Σε 3 ημέρες:

Το 1^ο και το 2^ο συνεργείο μαζί έκαναν τα $3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{100-x}{100} \cdot \frac{1}{12} \right)$ του έργου που απέμειναν. (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{100-x}{100} \cdot \frac{1}{12} \right) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{10} + \frac{100-x}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{100-x}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{100-x}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40} \Leftrightarrow \frac{100-x}{100} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 1000 - 10x = 300 \Leftrightarrow 10x = 700$$

$$\Leftrightarrow x = 70$$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι ικανοποιούν την εξής ιδιότητα: το τετράγωνο τους αυξημένο κατά 40 είναι τέλειο τετράγωνο.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω x φυσικός αριθμός με την πιο πάνω ιδιότητα, τότε:

$$x^2 + 40 = y^2, \quad y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 40 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 40$$

Επειδή τα $y - x$ και $y + x$ είναι θετικοί ακέραιοι, έχουμε:

- $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 40 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{39}{2}, y = \frac{41}{2}$ Απορρίπτεται διότι x, y φυσικοί αριθμοί.
- $\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9, y = 11$ Δεκτή.
- $\begin{cases} y - x = 4 \\ y + x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, y = 7$ Δεκτή
- $\begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{13}{2}$ Απορρίπτεται διότι x, y φυσικοί αριθμοί.

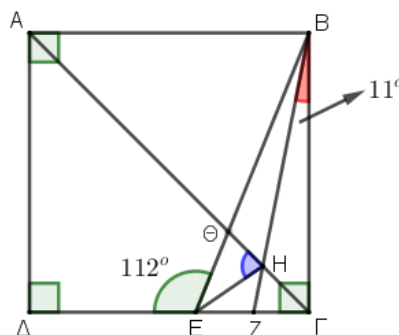
Άρα, οι φυσικοί αριθμοί που ικανοποιούν την πιο πάνω ιδιότητα είναι το 3 και το 9.

Πρόβλημα 4

Στην πλευρά $\Delta\Gamma$ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, παίρνουμε σημεία E και Z έτσι ώστε $\angle BE\Delta = 112^\circ$ και $\angle GBZ = 11^\circ$. Αν η BZ τέμνει την $A\Gamma$ στο H να υπολογίσετε την γωνία $\angle EHA$.

Προτεινόμενη Λύση

Από τα δεδομένα του προβλήματος κατασκευάζουμε πιο κάτω σχήμα:



$\angle B\Gamma A = \angle A\Gamma\Delta = 45^\circ$ (Οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούν τις γωνίες του)

$\Rightarrow \theta\Gamma$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $B\Gamma E$. (1)

Η $\angle\Delta E B$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $B\Gamma E$, άρα:

$$\angle EBF = 112 - 90 = 22^\circ \Rightarrow \angle EBZ = 22 - 11 = 11^\circ = \angle ZBF$$

$\Rightarrow BZ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου BFE . (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το H είναι το σημείο τομής των διχοτόμων BF και BZ του τριγώνου BFE , επομένως το H είναι το έγκεντρο του τριγώνου BFE

$$\Rightarrow EH \text{ είναι διχοτόμος του τριγώνου } BFE \Rightarrow \angle BEH = \angle FEH = \frac{180-112}{2} = 34^\circ .$$

$$\Rightarrow \angle DEH = 112 + 34 = 146^\circ$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τετράπλευρου $ADHE$ υπολογίζουμε:

$$\angle BEH = 360 - 45 - 90 - 146 = 79^\circ$$