



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2021

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 18/12/2021

Ώρα Εξέτασης: 09:30 - 12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς α, β και γ με $\alpha < \beta < \gamma$ που ικανοποιούν:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma = 614$$

Προτεινόμενη Λύση

$$\alpha + (\beta + \alpha\beta) + (\gamma + \alpha\gamma) + (\beta\gamma + \alpha\beta\gamma) = 614$$

$$\alpha + \beta(1 + \alpha) + \gamma(1 + \alpha) + \beta\gamma(1 + \alpha) = 614$$

Προσθέτοντας 1 και στα 2 μέλη προκύπτει:

$$1 + \alpha + \beta(1 + \alpha) + \gamma(1 + \alpha) + \beta\gamma(1 + \alpha) = 614 + 1$$

$$(1 + \alpha)(1 + \beta + \gamma + \beta\gamma) = 615$$

$$(1 + \alpha)[1 + \beta + \gamma(1 + \beta)] = 615$$

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) = 3 \cdot 5 \cdot 41$$

Αφού α, β και γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$ και 3, 5, 41 πρώτοι αριθμοί τότε:

$$1 + \alpha = 3 \quad \text{τότε} \quad \alpha = 2,$$

$$1 + \beta = 5 \quad \text{τότε} \quad \beta = 4,$$

$$1 + \gamma = 41 \quad \text{τότε} \quad \gamma = 40.$$

Πρόβλημα 2

Αν $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+8}}{\sqrt[3]{x^3+9x^2+27x+27}}$, να δείξετε ότι:

$$\sqrt{259} \cdot \varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(3) \cdot \dots \cdot \varphi(107) \cdot \varphi(108) = 14$$

Προτεινόμενη Λύση

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 8}}{\sqrt[3]{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}} = \frac{\sqrt{(x+4)(x+2)}}{\sqrt[3]{(x+3)^3}} = \frac{\sqrt{(x+4)(x+2)}}{x+3} = \frac{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+4}}{x+3}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdots \varphi(108) &= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}}{7} \cdots \frac{\sqrt{109} \cdot \sqrt{111}}{110} \cdot \frac{\sqrt{110} \cdot \sqrt{112}}{111} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{4}}{1} \cdot \frac{\sqrt{111}}{1} \cdot \frac{\sqrt{112}}{111} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{112}}{2 \cdot \sqrt{111}}\end{aligned}$$

Τότε

$$\sqrt{259} \cdot \varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdots \varphi(108) = \sqrt{259} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{112}}{2 \cdot \sqrt{111}} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{37} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{37}} = 14$$

Πρόβλημα 3

Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 και 6 το πολύ μια φορά το καθένα σχηματίζουμε πενταψήφιους αριθμούς. Να βρείτε πόσοι από αυτούς διαιρούνται με το 3 και το 4;

Προτεινόμενη Λύση

Τα ψηφία που δίνονται για κατασκευή των πενταψήφιων αριθμών είναι 6, άρα πρέπει ένα από τα ψηφία αυτά να μην περιέχεται στον πενταψήφιο αριθμό. Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3. Παρατηρούμε ότι $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ είναι πολλαπλάσιο του 3, επομένως για να διαιρείται ο πενταψήφιος αριθμός με το 3 πρέπει το ψηφίο που δεν θα περιέχεται στον πενταψήφιο αριθμό να είναι πολλαπλάσιο του 3. Με βάση τα πιο πάνω έχουμε 2 περιπτώσεις για τις οποίες ο πενταψήφιος διαιρείται με το 3.

Περίπτωση 1 Ο πενταψήφιος αριθμός να έχει ψηφία **1,2,3,4 και 5**

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \Rightarrow \text{Διαιρείται με το 3.}$$

Για να διαιρείται και με το 4 πρέπει να τελειώνει σε 12 ή 24 ή 32 ή 52.

Αν α , β και γ είναι τα πρώτα τρία ψηφία του αριθμού τότε ο αριθμός μπορεί να αρχίζει με:

$$\alpha\beta\gamma, \alpha\gamma\beta, \beta\alpha\gamma, \beta\gamma\alpha, \gamma\alpha\beta, \gamma\beta\alpha$$

Άρα υπάρχουν $6 \cdot 4 = 24$ πενταψήφιοι.

Περίπτωση 2 Ο πενταψήφιος αριθμός να έχει ψηφία **1,2,4, 5 και 6**

$$1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 18 \Rightarrow \text{Διαιρείται με το 3.}$$

Για να διαιρείται και με το 4 πρέπει να τελειώνει σε 12 ή 16 ή 24 ή 52 ή 56 ή 64.

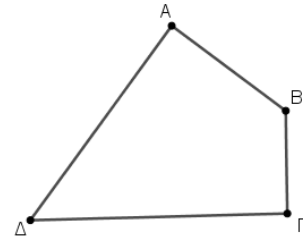
Όπως και στην περίπτωση 1 τα πρώτα 3 ψηφία του αριθμού σχηματίζονται με 6 τρόπους.

Άρα υπάρχουν $6 \cdot 6 = 36$ πενταψήφιοι.

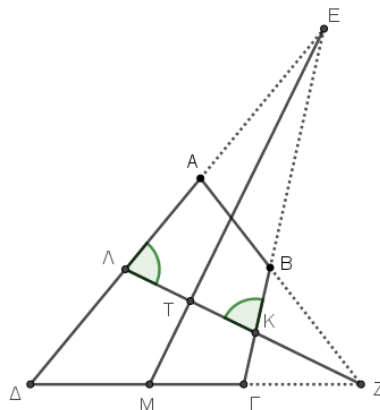
$$\text{Σύνολο: } 24 + 36 = 60 \text{ πενταψήφιοι αριθμοί.}$$

Πρόβλημα 4

Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ οι γωνίες του $\angle A$ και $\angle \Gamma$ είναι παραπληρωματικές. Οι προεκτάσεις των πλευρών ΔA και ΓB τέμνονται στο E και οι προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Delta \Gamma$ τέμνονται στο Z . Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle DE\Gamma$ και $\angle AZ\Delta$ τέμνονται κάθετα.



Προτεινόμενη Λύση



(α) Αφού AZ διχοτόμος της γωνίας $AZ\Delta \Rightarrow \angle AZ\Lambda = \angle LZ\Delta = x$

$$\angle \Lambda KE = \angle KBZ + \angle BZK = \angle KBZ + x \quad (\text{Εξωτερική γωνία του τριγώνου } BKZ) \quad (1)$$

$$\angle ELK = \angle \Delta + \angle LZ\Delta = \angle \Delta + x \quad (\text{Εξωτερική γωνία του τριγώνου } \Lambda Z\Delta) \quad (2)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\angle KBZ = \angle \Delta$

Αφού οι γωνίες $\angle A$ και $\angle \Gamma$ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματικές τότε και οι γωνίες $\angle B$ και $\angle \Delta$ είναι παραπληρωματικές (διότι το άθροισμα των γωνιών του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με 360°).

Επομένως:

$$\angle \Delta = 180^\circ - \angle AB\Gamma \quad \text{και}$$

$$\angle KBZ = 180^\circ - \angle AB\Gamma \quad (\text{ευθεία γωνία})$$

$$\text{Τότε} \quad \angle \Delta = \angle KBZ \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) $\Rightarrow \angle \Lambda KE = \angle ELK$ τότε το τρίγωνο ELK είναι ισοσκελές με $EL = EK$.

Αφού η ET είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ELK τότε είναι και ύψος του, τότε $EM \perp Z\Lambda$.