ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2026

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2026 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Έστω x θετικός πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $x+\frac{1}{x}=3$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(i) $A=x^2+\frac{1}{x^2}$ **(ii)** $B=x^3+\frac{1}{x^3}$ **(iii)** $\Gamma=x^5+\frac{1}{x^5}$

Προτεινόμενη Λύση

(i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=9 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7 \Longrightarrow \boldsymbol{A=7}$

(ii) $B=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=3(7-1)=18 \Longrightarrow \boldsymbol{B=18}$

(iii) $A\cdot B=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^5}=x^5+\frac{1}{x^5}+3$

$$7\cdot 18=x^5+\frac{1}{x^5}+3 \Leftrightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=126-3 \Longrightarrow \boldsymbol{\Gamma=123}$$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος α διαιρεθεί με το 3 αφήνει υπόλοιπο 1. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - 1$$

είναι πολλαπλάσιο του 9.

Προτεινόμενη Λύση

Από το δεδομένο, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε $\alpha = 3\nu + 1$ και έχουμε:

$$A = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - 1 = \frac{(3\nu+1)^2 + 3\nu + 1}{2} - 1 = \frac{9\nu^2 + 9\nu + 1 + 1 - 2}{2} = 9\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

Όμως, $\frac{\nu(\nu+1)}{2} = \kappa \in \mathbb{N}$, αφού ένας από τους διαδοχικούς $\nu, \nu+1$ είναι άρτιος.

Συνεπώς $A = 9\kappa,\ \kappa \in \mathbb{N}$ πολλαπλάσιο του 9.

Πρόβλημα 3

Αν $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}},$$

είναι ανεξάρτητη του x.

Προτεινόμενη Λύση

$$A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} > 0, \qquad \forall x \geq 2$$

$$A^2 = \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\right)^2$$

$$\Longrightarrow A^2 = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

$$\Longrightarrow A^2 = 2x - 2\sqrt{\left(x + 2\sqrt{x-1}\right)\left(x - 2\sqrt{x-1}\right)}$$

$$\Longrightarrow A^2 = 2x - 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)}$$

$$\Longrightarrow A^2 = 2x - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

$$\Longrightarrow A^2 = 2x - 2\sqrt{(x-2)^2}$$

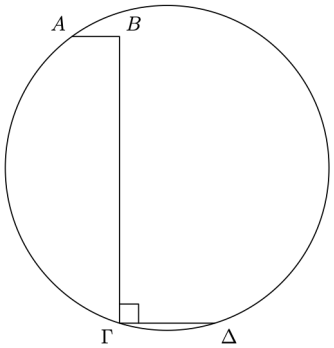
$$\Longrightarrow A^2 = 2x - 2(x-2)$$

$$\Longrightarrow A^2 = 2x - 2x + 4$$

$$\Longrightarrow A^2 = 4$$

$$\Longrightarrow A = 2\text{ , ανεξάρτητη του } x$$

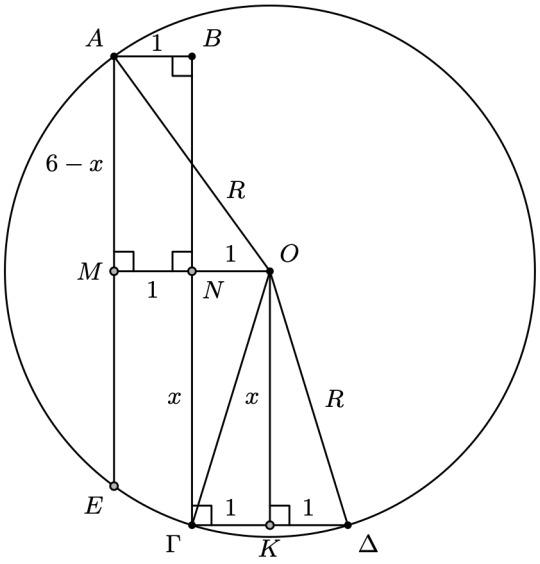
Πρόβλημα 4



Στο διπλανό σχήμα, δίνονται σημεία A, Γ, Δ ενός κύκλου και σημείο B εντός αυτού έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι παράλληλο προς το $\Gamma\Delta$ και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ είναι κάθετο στη χορδή $\Gamma\Delta$.

Αν $AB = 1\ \text{cm},\ \Gamma\Delta = 2\ \text{cm}$ και $B\Gamma = 6\ \text{cm},$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.

Προτεινόμενη Λύση



Έστω O το κέντρο του κύκλου.

Φέρουμε τα $O\Gamma, O\Delta$ και OA που είναι ακτίνες του κύκλου (O, R). Άρα $O\Gamma = O\Delta = OA = R$.

Φέρουμε $OK \perp \Gamma\Delta$, οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ το OK είναι ύψος και διάμεσος και έτσι $K\Gamma = K\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = 1cm.$

Φέρουμε $AE \parallel B\Gamma$ και $OM \perp AE$, συνεπώς $ON \perp B\Gamma$ και τότε

$ON = K\Gamma = 1cm$ και $NM = AB = 1cm.$

Θέτουμε $OK = x \Longrightarrow N\Gamma = x$ και τότε

$$NB = MA = 6 - x$$

Εφαρμόζουμε ΠΘ στα ορθογώνια τρίγωνα $OK\Delta$ και AMO και παίρνουμε αντίστοιχα:

$OK^2 + K\Delta^2 = O\Delta^2 \Longrightarrow x^2 + 1^2 = R^2 \Longrightarrow x^2 + 1 = R^2$ (1) και

$AM^2 + MO^2 = OA^2 \Longrightarrow (6 - x)^2 + 2^2 = R^2 \Longrightarrow 40 + x^2 - 12x = R^2$ (2)

Από (1), (2) παίρνουμε

$$x^2 + 1 = 40 + x^2 - 12x \Longrightarrow 12x = 39 \Longrightarrow x = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}cm$$

Αντικαθιστούμε στην (1)

$$\left(\frac{13}{4}\right)^2 + 1 = R^2 \Longrightarrow R^2 = \frac{169}{16} + 1 = \frac{185}{16}$$

Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\boldsymbol{E = \pi R^2 = \frac{185\pi}{16} cm^2}$