



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 13/11/2022

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1: Δίνονται $\alpha \in \mathbb{R}$ και συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \frac{3x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2} \quad \text{και} \quad g(x) = ax - \frac{x^3}{1 + x^2}$$

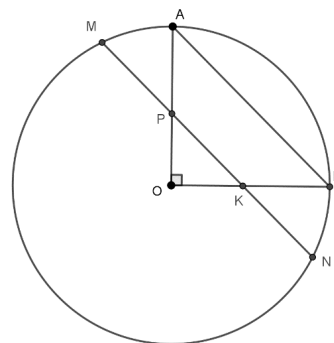
(α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

(β) Αν η g είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha \geq \frac{9}{8}$.

Πρόβλημα 2: Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\hat{B} = 2\hat{A}$. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 = \alpha(\alpha + \gamma)$.

(Με $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ συμβολίζουμε τα μέτρα των γωνιών και αντίστοιχα με α, β, γ τα μέτρα των απέναντι πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.)

Πρόβλημα 3: Στο διπλανό σχήμα η ακτίνα OA είναι κάθετη στην ακτίνα OB . Η ευθεία MN είναι παράλληλη με την AB και τέμνει την AO στο P , την BO στο K και τον κύκλο στα σημεία M και N . Έστω $MP = 7$ και $PN = 17$.



(α) Να αποδείξετε ότι $PM = KN$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου σχήματος $APKB$.

Πρόβλημα 4: Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν όλες οι πιο κάτω συνθήκες:

- (1) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- (2) $g(x) = f(x) \cdot h(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- (3) $h^2(x) = 1 - [h'(x)]^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε ένα από τα κοινά τους σημεία.