ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2020 (ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021)

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 28/2/2021 *Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

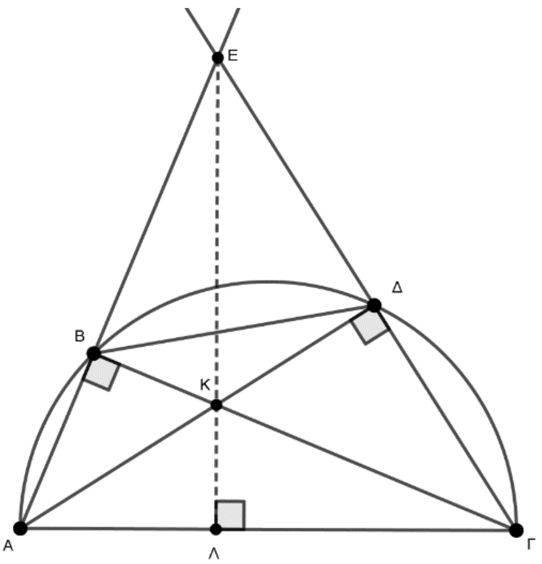
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Σε ημικύκλιο διαμέτρου $ΑΓ = 2R$ παίρνουμε σημεία $Β, Δ$ και έστω $Κ$ το σημείο τομής των ευθειών $ΑΔ$ και $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι $(ΑΚ)(ΑΔ) + (ΓΚ)(ΓΒ) = 4R^2$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

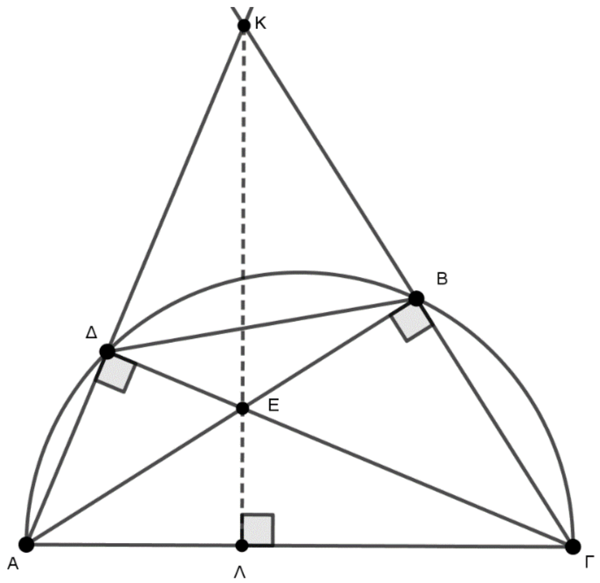
Περίπτωση 1η : Το σημείο Κ βρίσκεται εντός του ημικυκλίου



Είναι $\angle ΑΒΓ = \angle ΑΔΓ = 90^0$, αφού η $ΑΓ$ είναι διάμετρος του ημικυκλίου.
Έτσι, $ΑΔ$ και $ΓΒ$ είναι ύψη του τριγώνου $ΔΕΑΓ$ και συνεπώς το $Κ$ είναι το ορθόκεντρό του.
Άρα το τρίτο ύψος $ΕΛ$ του τριγώνου διέρχεται από το $Κ$.
Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $ΓΛΚΔ$ έχουμε
$(ΑΚ)(ΑΔ) = (ΑΛ)(ΑΓ) : \ (1)$
Όμοια, από το εγγράψιμο τετράπλευρο $ΑΒΚΛ$ έχουμε
$(ΓΚ)(ΓΒ) = (ΓΛ)(ΓΑ) : \ (2)$
Προσθέτοντας κατά μέλη τις $(1), (2)$ παίρνουμε

$$(ΑΚ)(ΑΔ) + (ΓΚ)(ΓΒ) = (ΑΛ)(ΑΓ) + (ΓΛ)(ΓΑ) = (ΑΓ)(ΑΛ + ΓΛ)$$
$$= (ΑΓ)(ΑΓ) = (ΑΓ)^2 = 4R^2$$

<u>Περίπτωση 2η</u> : Το σημείο Κ βρίσκεται εκτός του ημικυκλίου



Είναι $\angle AB\Gamma = \angle A\Delta\Gamma = 90^0$, αφού η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του ημικυκλίου.
Έτσι, AB και $\Gamma\Delta$ είναι ύψη του τριγώνου $\Delta KA\Gamma$ και συνεπώς το E είναι το ορθόκεντρό του.
Άρα το τρίτο ύψος $K\Lambda$ του τριγώνου διέρχεται από το E.
Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BK\Delta E$ και $BE\Lambda\Gamma$έχουμε διαδοχικά
$(AK)(A\Delta) = (AB)(AE) = (A\Gamma)(A\Lambda) : \ (1)$
Όμοια, από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BK\Delta E$ και $A\Lambda E\Delta$ έχουμε
$(\Gamma K)(\Gamma B) = (\Gamma\Delta)(\Gamma E) = (\Gamma A)(\Gamma\Lambda) : \ (2)$
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}(AK)(A\Delta) + (\Gamma K)(\Gamma B) = (A\Gamma)(A\Lambda) + (\Gamma A)(\Gamma\Lambda) &= (A\Gamma)(A\Lambda + \Gamma\Lambda) \\ &= (A\Gamma)(A\Gamma) = (A\Gamma)^2 = 4R^2\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x| + |y| \neq 0$. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x^2 + 14y^2 - 12xy}{x^2 + 4y^2}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

Αν $y = 0 \Rightarrow x \neq 0$ και $A = \frac{x^2}{x^2} = 1.$ **(1)**

Αν $y \neq 0 \Rightarrow A = \frac{\frac{x^2}{y^2} + \frac{14y^2}{y^2} - \frac{12xy}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{4y^2}{y^2}} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 14 - 12\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4}$

Θέτοντας $t = \frac{x}{y}$ η παράσταση A μετατρέπεται σε συνάρτηση με μια μεταβλητή το t και τύπο:

$$A(t) = \frac{t^2 - 12t + 14}{t^2 + 4}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Αρκεί να βρω το ολικό μέγιστο και ελάχιστο της συνάρτησης $A(t)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

$$A'(t) = \frac{(2t - 12)(t^2 + 4) - 2t(t^2 - 12t + 14)}{(t^2 + 4)^2} = \frac{12t^2 - 20t - 48}{(t^2 + 4)^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$A'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 20t - 48 = 0 \Leftrightarrow 4(3t^2 - 5t - 12) = 0 \Leftrightarrow (3t + 4)(t - 3) = 0$$

Οι ρίζες της $A'(t)$ είναι $t = -\frac{4}{3}$ και $t = 3$.

t	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$A'(t)$		+	0	−	0	+	
$A(t)$		↗	max	↘	min	↗	

Η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο $t = -\frac{4}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $t = 3$.

$$A\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{16}{9} + 16 + 14}{\frac{16}{9} + 4} = 5{,}5 \quad (\mathbf{2})$$

$$A(3) = \frac{9 - 36 + 14}{9 + 4} = -1 \quad (\mathbf{3})$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} A(t) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{t^2 - 12t + 14}{t^2 + 4} = 1 \quad (\mathbf{4})$$

Από τις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει ότι η παράσταση A έχει μέγιστη τιμή 5,5 και ελάχιστη -1.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ που είναι πρώτοι και ικανοποιούν την εξίσωση

$$\alpha^3 - 7\beta^3 + 18\gamma - \alpha - 2\delta = 256 \quad (1)$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

Παρατηρούμε ότι $\alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha^2 - 1) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)$.
Ο ένας εκ των αριθμών $\{\alpha, \alpha + 1\}$ είναι άρτιος (και ο άλλος περιττός), άρα το γινόμενο τους $\alpha(\alpha + 1)$ είναι άρτιος αριθμός και επομένως ο αριθμός $\alpha^3 - \alpha$ είναι άρτιος.
Επίσης ένας εκ των τριών διαδοχικών αριθμών $\{\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1\}$ όταν διαιρεθεί με το 3 αφήνει υπόλοιπο 0 (και οι άλλοι δύο αφήνουν υπόλοιπα 1 και 2).
Επομένως το γινόμενο τους $\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) = \alpha^3 - \alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 3.
Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι ο αριθμός $\alpha^3 - \alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 6.
Έστω $\alpha^3 - \alpha = 6\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$6\kappa + 18\gamma - 2\delta - 256 = 7\beta^3$$
$$\Leftrightarrow \; 2(3\kappa + 9\gamma - \delta - 128) = 7\beta^3 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι το $7\beta^3$ είναι άρτιος, έτσι το β είναι άρτιος και επειδή είναι και πρώτος βρίσκουμε ότι $\beta = 2$. Η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\Leftrightarrow \; 2(3\kappa + 9\gamma - \delta - 128) = 56$$
$$\Leftrightarrow 3\kappa + 9\gamma - \delta = 156$$
$$\Leftrightarrow \delta = 3\kappa + 9\gamma - 156$$
$$\Leftrightarrow \delta = 3(\kappa + 3\gamma - 52) \quad (3)$$

Εφόσον το δ είναι πρώτος αριθμός η εξίσωση (3) δίνει ότι $\delta = 3$ και γίνεται:

$$\kappa + 3\gamma - 52 = 1$$

$$\Leftrightarrow \kappa + 3\gamma = 53$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^3 - \alpha}{6} + 3\gamma = 53$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{53 - \frac{\alpha^3 - \alpha}{6}}{3} \quad (4)$$

Επειδή τα α και γ είναι πρώτοι αριθμοί έχουμε συνολικά 4 περιπτώσεις:

- $\alpha = 2 \Rightarrow \gamma = \frac{52}{3}$ απορρίπτεται
- $\alpha = 3 \Rightarrow \gamma = \frac{49}{3}$ απορρίπτεται
- $\alpha = 5 \Rightarrow \gamma = 11$ δεκτή
- $\alpha \geq 7 \Rightarrow \gamma \leq -1$ απορρίπτονται

Από τα πιο πάνω προκύπτει ότι η μόνη λύση της εξίσωσης $\alpha^3 - 7\beta^3 + 18\gamma - \alpha - 2\delta = 256$ με τα α, β, γ και δ να είναι πρώτοι αριθμοί είναι:

$$\alpha = 5, \beta = 2, \gamma = 11 \text{ και } \delta = 3.$$

Πρόβλημα 4

Το δευτέρου βαθμού πολυώνυμο $f(x)$ έχει ρίζα το 2. Αν το πολυώνυμο $\mathrm{g}(x) = f(f(x))$ έχει <u>μοναδική</u> πραγματική ρίζα το 5, να βρείτε το $f(x)$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 1:

$$f(x) = a(x-b)^2 + c \Longrightarrow f(f(x)) = a(f(x)-b)^2 + c$$

$$f(2b-5) = a(b-5)^2 + c = a(5-b)^2 + c = f(5)$$

$$\Longrightarrow f\big(f(2b-5)\big) = f\big(f(5)\big) = 0 \Longrightarrow 2b-5 = 5 \Longrightarrow b = 5$$

$$\Longrightarrow f(x) = a(x-5)^2 + c$$

$$f(8) = f(2) = 0 \Longrightarrow f(5) = 2 \text{ ή } f(5) = 8$$

Έστω $f(5) = 8$. Αφού, $f(2) = 0$ και η f συνεχής, υπάρχει κάποιο $x_0 \in (2,5)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2$. Τότε, $f\big(f(x_0)\big) = f(2) = 0$ και $x_0 \neq 5$. Άτοπο. Άρα,

$$f(5) = 2 \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow f(x) = a(x-5)^2 + 2$$

$$f(2) = 0 \Longrightarrow a(2-5)^2 + 2 = 0 \Longrightarrow 9a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{2}{9}$$

Καταλήγουμε ότι,

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = -\frac{2}{9}(x-5)^2 + 2}}$$

Όντως, για $x = 5$: $\mathrm{g}(5) = f\big(f(5)\big) = f(2) = -2 + 2 = 0$ και

για $x \neq 5$:

$$f(x) < 2 \Longrightarrow f(x) - 5 < -3 \Longrightarrow (f(x)-5)^2 > 9 \Longrightarrow -\frac{2}{9}(f(x)-5)^2 < -2$$

$$\Longrightarrow -\frac{2}{9}(f(x)-5)^2 + 2 < 0 \Longrightarrow \mathrm{g}(x) = f\big(f(x)\big) < 0$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 2:

Το 2 είναι ρίζα του $f(x) \Rightarrow f(x) = a(x-2)(x-\rho)$.

Το πολυώνυμο $g(x) = f(f(x))$ είναι 4ου βαθμού και το 5 είναι μοναδική πραγματική ρίζα του.

Επομένως το 5 είναι διπλή ρίζα του $g(x) \Rightarrow g(5) = g'(5) = 0$.

$g(5) = 0 \Rightarrow f\big(f(5)\big) = 0 \Rightarrow f(5)$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$.

Όμως οι μόνες ρίζες του $f(x)$ είναι το 2 και το ρ, άρα $\boldsymbol{f(5) = 2}$ ή $\boldsymbol{f(5) = \rho}$.

Επίσης $g'(5) = f'(5) \cdot f'\big(f(5)\big) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{f'(5) = 0}$ ή $\boldsymbol{f'\big(f(5)\big) = 0}$.

Υπάρχουν συνολικά 4 περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1</u> $\boldsymbol{f(5)=2}$ και $\boldsymbol{f'(5)=0}$

$$f'(x)=a(x-\rho+x-2)=a(2x-\rho-2)\ \ (*)$$

$f'(5)=0 \Rightarrow \alpha(10-\rho-2)=0 \Rightarrow \rho=8$

$f(5)=2 \Rightarrow a(5-2)(5-8)=2 \Rightarrow a=-\frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{f(x)=-\frac{2}{9}(x-2)(x-8)}$ (1)

Μένει να ελέγξουμε κατά πόσο το πολυώνυμο $g(x)$ δεν έχει άλλη πραγματική ρίζα εκτός του 5.

$g(x)=-\frac{2}{9}\left[-\frac{2}{9}(x-2)(x-8)-2\right]\left[-\frac{2}{9}(x-2)(x-8)-8\right]=-\frac{8}{729}(x-5)^2(x^2-10x+52)$

Επειδή η Διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2-10x+52$ είναι $\Delta=-108<0$ το πολυώνυμο $g(x)$ δεν έχει άλλη πραγματική ρίζα εκτός του 5 και ως εκ τούτου το πολυώνυμο (1) είναι δεκτό.

<u>Περίπτωση 2</u> $\boldsymbol{f(5)=2}$ και $\boldsymbol{f'(f(5))=0}$

$f(5)=2$ και $f'(f(5))=0 \Rightarrow f'(2)=0 \overset{(*)}{\Rightarrow} a(4-\rho-2)=0 \Rightarrow \rho=2$

$f(5)=2 \Rightarrow a(5-2)(5-2)=2 \Rightarrow a=\frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{2}{9}(x-2)^2}$ (2)

$g(x)=\frac{2}{9}\left[\frac{2}{9}(x-2)^2-2\right]^2=\frac{8}{729}(x-5)^2(x+1)^2$

Επειδή το πολυώνυμο $g(x)$ έχει ρίζα και το -1 εκτός από το 5, το πολυώνυμο (2) για την $f(x)$ **απορρίπτεται**.

<u>Περίπτωση 3</u> $\boldsymbol{f(5)=\rho}$ και $\boldsymbol{f'(5)=0}$

$f'(5)=0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a(10-\rho-2)=0 \Rightarrow \rho=8$

$f(5)=\rho=8 \Rightarrow a(5-2)(5-8)=8 \Rightarrow a=-\frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{f(x)=-\frac{8}{9}(x-2)(x-8)}$ (3)

$g(x)=-\frac{8}{9}\left[-\frac{8}{9}(x-2)(x-8)-2\right]\left[-\frac{8}{9}(x-2)(x-8)-8\right]=-\frac{128}{729}(x-5)^2(4x^2-40x+73)$

Επειδή η Διακρίνουσα της εξίσωσης $4x^2-40x+73=0$ είναι $\Delta=432>0$, το πολυώνυμο $g(x)$ έχει ακόμη 2 πραγματικές ρίζες εκτός του 5 και ως εκ τούτου το πολυώνυμο (3) **απορρίπτεται**.

<u>Περίπτωση 4</u> $\boldsymbol{f(5)=\rho}$ και $\boldsymbol{f'(f(5))=0}$

$f(5)=\rho$ και $f'(f(5))=0 \Rightarrow f'(\rho)=0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} a(2\rho-\rho-2)=0 \Rightarrow \rho=2$

$f(5)=2 \Rightarrow a(5-2)(5-2)=2 \Rightarrow a=\frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{2}{9}(x-2)^2}$

Απορρίπτεται, αφού είναι το ίδιο πολυώνυμο που βρήκαμε και στην περίπτωση 2.

Συνεπώς η μόνη αποδεκτή απάντηση είναι

$$\boldsymbol{f(x)=-\frac{2}{9}(x-2)(x-8)}$$