



Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2025

«Γ' Λυκείου»

Ημερομηνία: 8/11/2025 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Πρόβλημα 1.

- i. Για κάθε θετικό ακέραιο $\nu > 2$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{1 + \frac{1}{(\nu-1)^2} + \frac{1}{\nu^2}} = 1 + \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}$$

- ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$$

Πρόβλημα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x^\rho}{2025^x}, \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\rho > 0$, το πλήθος των θετικών πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$x^\rho = 2025^x$$

Πρόβλημα 3.

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακераίους x και y που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{xy}{3} + 2y + x = 2025$$

Πρόβλημα 4.

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α . Πάνω στις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ παίρνουμε σημεία E και Z αντίστοιχα τέτοια ώστε $AE = \Delta Z = \frac{\alpha}{3}$.

Θεωρούμε M και N τα μέσα των EZ και ZB αντίστοιχα. Η ευθεία AZ τέμνει τις ευθείες MN και EB στα σημεία K και T αντίστοιχα. Αν η παράλληλη από το B προς την AZ τέμνει την ευθεία MN στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda BT$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του συναρτήσει του α .