Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2026

«Γ′ Λυκείου»

Ημερομηνία: 7/11/2026 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

Οδηγιες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
5. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Πρόβλημα 1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

i. Να αποδείξετε ότι

$$\text{συν}(A+B)\cdot\text{συν}(A-B)=\frac{1}{2}\left(\text{συν}\,2A+\text{συν}\,2B\right).$$

ii. Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\Gamma\neq 90^\circ$, ισχύει

$$\frac{\eta\mu\, B}{\text{συν}\,\Gamma}=\eta\mu\, A+\text{συν}\, A\cdot\text{σφ}\, B,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Πρόβλημα 2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha<0,\qquad \beta>0\qquad \text{και}\qquad \beta+1<|\alpha|.$$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

ii. Να αποδείξετε ότι ακριβώς μία από τις ρίζες αυτές βρίσκεται μεταξύ των αριθμών α και β.

Πρόβλημα 3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο P στο εσωτερικό της πλευράς $B\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των τμημάτων PB και $P\Gamma$ τέμνουν τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και Z αντίστοιχα. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Gamma$ τέμνει το τμήμα PZ σε ένα εσωτερικό του σημείο K και η διχοτόμος της γωνίας $\angle\Delta PZ$ τέμνει το τμήμα AZ σε ένα εσωτερικό του σημείο T. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, T, P και K βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4. Η ακολουθία (α_ν) ορίζεται από τις σχέσεις

$$\alpha_1=1\qquad \text{και}\qquad \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\frac{1}{\alpha_\nu}\quad \text{για κάθε } \nu\geqslant 1.$$

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu^2\geqslant 2\nu-1$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $\nu\geqslant 2$ ισχύει

$$\alpha_\nu^2\leqslant 2\nu-1+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2\nu-3}\right).$$

iii. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{1012}}>44.$$