Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2026

«Γ′ Λυκείου»

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ημερομηνία: 7/11/2026 Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

Πρόβλημα 1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

i. Να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu(A+B)\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)=\frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,2A+\sigma\upsilon\nu\,2B\right).$$

ii. Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\Gamma\neq 90^\circ$, ισχύει

$$\frac{\eta\mu\,B}{\sigma\upsilon\nu\,\Gamma}=\eta\mu\,A+\sigma\upsilon\nu\,A\cdot\sigma\varphi\,B,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Λύση. Ισχύει $A+B+\Gamma=180^\circ$, άρα $\sigma\upsilon\nu\,\Gamma=-\sigma\upsilon\nu(A+B)$.

(i) Από τους τύπους της πρόσθεσης,

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(A+B)\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)&=(\sigma\upsilon\nu\,A\,\sigma\upsilon\nu\,B-\eta\mu\,A\,\eta\mu\,B)\,(\sigma\upsilon\nu\,A\,\sigma\upsilon\nu\,B+\eta\mu\,A\,\eta\mu\,B)\\&=\sigma\upsilon\nu^2\,A\;\sigma\upsilon\nu^2\,B-\eta\mu^2\,A\;\eta\mu^2\,B.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $\sigma\upsilon\nu^2\,B=1-\eta\mu^2\,B$ και $\eta\mu^2\,A=1-\sigma\upsilon\nu^2\,A$:

$$\sigma\upsilon\nu^2\,A\left(1-\eta\mu^2\,B\right)-\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\,A\right)\eta\mu^2\,B=\sigma\upsilon\nu^2\,A-\eta\mu^2\,B.$$

Από την άλλη, αφού $\sigma\upsilon\nu\,2A=2\,\sigma\upsilon\nu^2\,A-1$ και $\sigma\upsilon\nu\,2B=1-2\,\eta\mu^2\,B$,

$$\frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,2A+\sigma\upsilon\nu\,2B\right)=\frac{1}{2}\left(2\,\sigma\upsilon\nu^2\,A-2\,\eta\mu^2\,B\right)=\sigma\upsilon\nu^2\,A-\eta\mu^2\,B.$$

Άρα τα δύο μέλη είναι ίσα.

(ii) Αφού $\Gamma\neq 90^\circ$, ισχύει $\sigma\upsilon\nu\,\Gamma\neq 0$. Επίσης $\eta\mu\,B\neq 0$, οπότε όλα τα κλάσματα ορίζονται. Αφού $\sigma\varphi\,B=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\,B}{\eta\mu\,B}$, το δεξί μέλος γράφεται

$$\eta\mu\,A+\sigma\upsilon\nu\,A\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\,B}{\eta\mu\,B}=\frac{\eta\mu\,A\,\eta\mu\,B+\sigma\upsilon\nu\,A\,\sigma\upsilon\nu\,B}{\eta\mu\,B}=\frac{\sigma\upsilon\nu(A-B)}{\eta\mu\,B}.$$

Η δοσμένη σχέση γίνεται λοιπόν

$$\frac{\eta\mu\,B}{\sigma\upsilon\nu\,\Gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu(A-B)}{\eta\mu\,B}\iff\eta\mu^2\,B=\sigma\upsilon\nu\,\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B)=-\sigma\upsilon\nu(A+B)\cdot\sigma\upsilon\nu(A-B).$$

Από το (i) και τον τύπο $\eta\mu^2\,B=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,2B}{2}$ παίρνουμε

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,2B}{2}=-\frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,2A+\sigma\upsilon\nu\,2B\right)\iff 1=-\sigma\upsilon\nu\,2A\iff\sigma\upsilon\nu\,2A=-1.$$

Αφού $0^\circ<2A<360^\circ$, έπεται ότι $2A=180^\circ$, δηλαδή $A=90^\circ$. Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A.

(Αντίστροφα, αν $A=90^\circ$ τότε $\sigma\upsilon\nu\,\Gamma=\eta\mu\,B$, οπότε και τα δύο μέλη της σχέσης ισούνται με 1.)

Πρόβλημα 2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha < 0, \qquad \beta > 0 \qquad \text{και} \qquad \beta + 1 < |\alpha|.$$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
ii. Να αποδείξετε ότι ακριβώς μία από τις ρίζες αυτές βρίσκεται μεταξύ των αριθμών α και β.

Λύση.

(i) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ είναι $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$. Αφού $|\alpha| > \beta + 1 > 0$, ισχύει $\alpha^2 = |\alpha|^2 > (\beta + 1)^2$, οπότε

$$\Delta = \alpha^2 - 4\beta > (\beta + 1)^2 - 4\beta = (\beta - 1)^2 \geqslant 0.$$

Άρα $\Delta > 0$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2$.

(Εναλλακτικά: $f(1) = 1 + \alpha + \beta = \beta + 1 - |\alpha| < 0$, και αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός, η f έχει δύο άνισες ρίζες με $\rho_1 < 1 < \rho_2$.)

(ii) Αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός, ισχύει $f(x) < 0$ αν και μόνο αν $\rho_1 < x < \rho_2$, και $f(x) > 0$ αν και μόνο αν $x < \rho_1$ ή $x > \rho_2$.

- $f(\beta) = \beta^2 + \alpha\beta + \beta = \beta\,(\beta + 1 + \alpha) = \beta\,(\beta + 1 - |\alpha|) < 0$, αφού $\beta > 0$ και $\beta + 1 < |\alpha|$. Άρα $\rho_1 < \beta < \rho_2$.
- Από τους τύπους του Vieta, $\rho_1\rho_2 = \beta > 0$ και $\rho_1 + \rho_2 = -\alpha > 0$, άρα και οι δύο ρίζες είναι θετικές. Επειδή $\alpha < 0$, έπεται ότι $\alpha < \rho_1$. (Συμφωνεί με το ότι $f(\alpha) = 2\alpha^2 + \beta > 0$.)

Συνεπώς

$$\alpha < \rho_1 < \beta < \rho_2,$$

δηλαδή ακριβώς μία ρίζα, η ρ_1, βρίσκεται μεταξύ των αριθμών α και β.

Εναλλακτική λύση (με το θεώρημα Bolzano). Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική. Επειδή $\alpha < 0 < \beta$ και $-\alpha = |\alpha| > \beta + 1 > \beta$, ισχύει

$$\alpha < \beta < -\alpha.$$

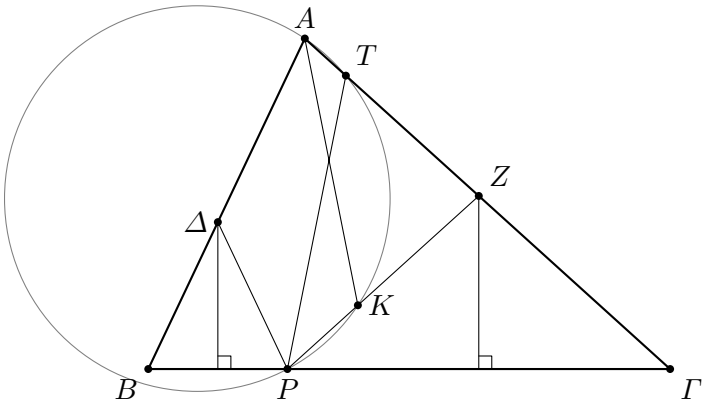
Υπολογίζουμε:

- $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^2 + \beta = 2\alpha^2 + \beta > 0$,
- $f(\beta) = \beta^2 + \alpha\beta + \beta = \beta\,(\beta + 1 - |\alpha|) < 0$,
- $f(-\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 + \beta = \beta > 0$.

Από το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, -\alpha]$, υπάρχουν $\rho_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\rho_2 \in (\beta, -\alpha)$ με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Αφού $\rho_1 < \beta < \rho_2$, οι ρίζες είναι άνισες, κάτι που αποδεικνύει το (i).

Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει το πολύ δύο ρίζες, άρα οι ρ_1, ρ_2 είναι όλες οι ρίζες της. Από αυτές μόνο η ρ_1 βρίσκεται μεταξύ των α και β, αφού $\rho_2 > \beta$ (και οι α, β δεν είναι ρίζες, αφού $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) \neq 0$). Αυτό αποδεικνύει το (ii).

Πρόβλημα 3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο P στο εσωτερικό της πλευράς $B\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των τμημάτων PB και $P\Gamma$ τέμνουν τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και Z αντίστοιχα. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Gamma$ τέμνει το τμήμα PZ σε ένα εσωτερικό του σημείο K και η διχοτόμος της γωνίας $\angle \Delta PZ$ τέμνει το τμήμα AZ σε ένα εσωτερικό του σημείο T. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, T, P και K βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.



Λύση. Συμβολίζουμε με $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Το Δ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του PB, άρα $\Delta B = \Delta P$ και το τρίγωνο ΔBP είναι ισοσκελές. Επομένως

$$\angle \Delta PB = \angle \Delta BP = \widehat{B},$$

αφού το Δ βρίσκεται πάνω στην πλευρά AB. Όμοια, το Z βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του $P\Gamma$, άρα $ZP = Z\Gamma$ και

$$\angle ZP\Gamma = \angle Z\Gamma P = \widehat{\Gamma},$$

αφού το Z βρίσκεται πάνω στην πλευρά $A\Gamma$. Οι ημιευθείες $P\Delta$ και PZ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη $B\Gamma$ (σε αυτό του A), άρα

$$\angle \Delta PZ = 180^\circ - \angle \Delta PB - \angle ZP\Gamma = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \widehat{A}.$$

Τώρα η PT είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle \Delta PZ$ και το K βρίσκεται στο τμήμα PZ, οπότε

$$\angle TPK = \angle TPZ = \frac{1}{2}\angle \Delta PZ = \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Gamma$ και το T βρίσκεται στο τμήμα AZ, δηλαδή πάνω στην ημιευθεία $A\Gamma$, οπότε

$$\angle TAK = \angle \Gamma AK = \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Άρα $\angle TAK = \angle TPK$. Τα σημεία K και T βρίσκονται στο εσωτερικό των πλευρών ZP και ZA του τριγώνου AZP, οπότε η ευθεία TK αφήνει την κορυφή Z στο ένα ημιεπίπεδο και τις κορυφές A και P στο άλλο. Επομένως το τμήμα TK φαίνεται από τα σημεία A και P, που βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία TK, υπό ίσες γωνίες. Άρα το τετράπλευρο $TKPA$ είναι εγγράψιμο, δηλαδή τα σημεία A, T, P και K βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4. Η ακολουθία (α_ν) ορίζεται από τις σχέσεις

$$\alpha_1 = 1 \qquad \text{και} \qquad \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{1}{\alpha_\nu} \quad \text{για κάθε } \nu \geqslant 1.$$

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu^2 \geqslant 2\nu - 1$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $\nu \geqslant 2$ ισχύει

$$\alpha_\nu^2 \leqslant 2\nu - 1 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2\nu - 3}\right).$$

iii. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{1012}} > 44.$$

Λύση. Αρχικά, με επαγωγή, $\alpha_\nu > 0$ για κάθε ν: ισχύει $\alpha_1 = 1 > 0$, και αν $\alpha_\nu > 0$, τότε $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{1}{\alpha_\nu} > 0$. Άρα η ακολουθία ορίζεται καλά. Υψώνοντας την αναδρομική σχέση στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\alpha_{\nu+1}^2 = \alpha_\nu^2 + 2 + \frac{1}{\alpha_\nu^2} \qquad \text{για κάθε } \nu \geqslant 1. \tag{1}$$

(i) Με επαγωγή: για $\nu = 1$, $\alpha_1^2 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$. Αν $\alpha_\nu^2 \geqslant 2\nu - 1$, τότε από την (1)

$$\alpha_{\nu+1}^2 > \alpha_\nu^2 + 2 \geqslant 2\nu + 1 = 2(\nu + 1) - 1.$$

(ii) Γράφοντας την (1) για $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ και προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\alpha_\nu^2 = \alpha_1^2 + 2(\nu - 1) + \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \frac{1}{\alpha_\kappa^2} = 2\nu - 1 + \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \frac{1}{\alpha_\kappa^2}.$$

Από το (i), $\dfrac{1}{\alpha_\kappa^2} \leqslant \dfrac{1}{2\kappa - 1}$, οπότε

$$\alpha_\nu^2 \leqslant 2\nu - 1 + \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \frac{1}{2\kappa - 1} = 2\nu - 1 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2\nu - 3}\right).$$

(iii) Η αναδρομική σχέση γράφεται

$$\frac{1}{\alpha_\kappa} = \alpha_{\kappa+1} - \alpha_\kappa \qquad \text{για κάθε } \kappa \geqslant 1.$$

Γράφοντάς την για $\kappa = 1, 2, \ldots, 1012$ και προσθέτοντας κατά μέλη (τηλεσκοπικό άθροισμα), παίρνουμε

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{1012}} = \alpha_{1013} - \alpha_1 = \alpha_{1013} - 1.$$

Από την (1), $\alpha_{1013}^2 = \alpha_{1012}^2 + 2 + \frac{1}{\alpha_{1012}^2} > \alpha_{1012}^2 + 2$, και από το (i) $\alpha_{1012}^2 \geqslant 2 \cdot 1012 - 1 = 2023$. Άρα

$$\alpha_{1013}^2 > 2025 = 45^2,$$

δηλαδή $\alpha_{1013} > 45$ (αφού $\alpha_{1013} > 0$). Επομένως

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{1012}} = \alpha_{1013} - 1 > 44.$$