



## ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Δ' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 20/04/2019

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

### ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**Πρόβλημα 1:** (α) Αν  $x$  είναι θετικός πραγματικός αριθμός να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^{12} - 1}{4} \geq \frac{x^3 - 1}{x}$$

(β) Αν  $\alpha, \beta$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\frac{\alpha^{12} + \beta^{12}}{4} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \geq \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}$$

**Πρόβλημα 2 :** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  όπου  $AB > 2B\Gamma$ . Πάνω στην πλευρά του  $AB$  παίρνουμε σημείο  $M$  τέτοιο ώστε  $AM = B\Gamma$  και πάνω στην ημιευθεία  $GB$  σημείο  $N$  τέτοιο ώστε  $GN = MB$ . Από το σημείο  $A$  φέρουμε παράλληλη προς την  $GM$  η οποία τέμνει την ευθεία  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $P$ . Ονομάζουμε  $K$  το σημείο τομής των ευθειών  $GM$  και  $AN$ . Να αποδείξετε

(i)  $AP = PN$

(ii) Τα σημεία  $A, K, M$  και  $\Delta$  ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

**Πρόβλημα 3 :** Σε ένα τουρνουά καλαθόσφαιρας συμμετέχουν ομάδες μόνο από την Λεμεσό και την Λευκωσία. Οι ομάδες της Λευκωσίας είναι 9 περισσότερες ομάδες από αυτές της Λεμεσού. Κάθε δύο ομάδες συναντήθηκαν για παιχνίδι μεταξύ τους ακριβώς μια φορά. Η νικήτρια ομάδα πήρε 1 πόντο, η χαμένη ομάδα 0 πόντους ενώ δεν υπήρξαν ισοπαλίες. Όλες οι ομάδες από την Λευκωσία μαζί συγκέντρωσαν 9 φορές περισσότερους πόντους από όλες τις ομάδες της Λεμεσού μαζί. Να βρείτε ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός αριθμός των νικών της πιο επιτυχημένης ομάδας από την Λεμεσό.

**Πρόβλημα 4 :** Να βρεθούν 10 διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί οι οποίοι διαιρούν τον αριθμό

$$A = 11111^{60} - 10009^{60}$$