ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Δ΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ **ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ**

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 20/04/2019 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **<u>όλα</u>** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>Πρόβλημα 1</u> : (α) Αν x είναι θετικός πραγματικός αριθμός να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^{12}-1}{4} \geq \frac{x^3-1}{x}$$

(β) Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\frac{\alpha^{12}+\beta^{12}}{4}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha} \geq \alpha^2+\beta^2+\frac{1}{2}$$

<u>Προτεινόμενη λύση:</u> (α) Η δεδομένη ανίσωση γράφεται

$$\frac{x^{12}-1}{4} \geq \frac{x^3-1}{x} \quad ή \quad x(x^{12}-1) \geq 4(x^3-1) \text{ ή}$$

$$x[(x^3)^4-1]-4(x^3-1) \geq 0 \text{ ή } x[((x^3)^2+1)((x^3)^2-1)]-4(x^3-1) \geq 0 \text{ ή}$$

$$x[(x^6+1)(x^3+1)(x^3-1)]-4(x^3-1) \geq 0 \text{ ή}$$

$$(x^3-1)[x(x^6+1)(x^3+1)-4] \geq 0 \qquad (1)$$

Έστω $A(x)=x(x^6+1)(x^3+1)-4$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον $x \in \mathbb{R}_+$

- Αν $x \geq 1$ τότε $x^3-1 \geq 0$ και $A(x) \geq 0$ επομένως ισχύει η (1).
- Αν $x < 1$ τότε $x^3-1 < 0$ και $A(x) < 0$ επομένως ισχύει η (1).

(β) Αν στην ανίσωση

$$\frac{x^{12}-1}{4} \geq \frac{x^3-1}{x}$$

θέσουμε διαδοχικά $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$\frac{\alpha^{12}-1}{4} \geq \frac{\alpha^3-1}{\alpha}$$

$$\frac{\beta^{12}-1}{4} \geq \frac{\beta^3-1}{\beta}$$

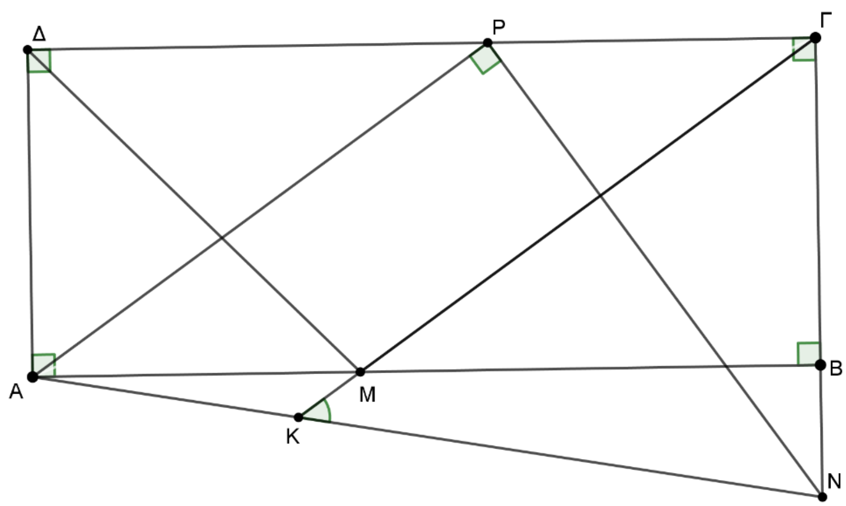
Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{\alpha^{12}-1}{4}+\frac{\beta^{12}-1}{4}\geq\frac{\alpha^{3}-1}{\alpha}+\frac{\beta^{3}-1}{\beta} \text{ ή } \frac{\alpha^{12}+\beta^{12}}{4}-\frac{1}{2}\geq\alpha^{2}+\beta^{2}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta} \text{ ή}$$

$$\frac{\alpha^{12}+\beta^{12}}{4}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\geq\alpha^{2}+\beta^{2}+\frac{1}{2}$$

<u>Πρόβλημα 2</u> : Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ όπου $ΑΒ > 2ΒΓ$. Πάνω στην πλευρά του $ΑΒ$ παίρνουμε σημείο $Μ$ τέτοιο ώστε $ΑΜ = ΒΓ$ και πάνω στην ημιευθεία $ΓΒ$ σημείο $Ν$ τέτοιο ώστε $ΓΝ = ΜΒ$. Από το σημείο $Α$ φέρουμε παράλληλη προς την $ΓΜ$ η οποία τέμνει την ευθεία $ΔΓ$ στο σημείο $Ρ$. Ονομάζουμε $Κ$ το σημείο τομής των ευθειών $ΓΜ$ και $ΑΝ$. Να αποδείξετε
(ι) $ΑΡ = ΡΝ$
(ιι) Τα σημεία $Α, Κ, Μ$ και $Δ$ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u>



(ι) Αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και την υπόθεση $ΑΜ = ΒΓ$ και $ΓΝ = ΜΒ$ έχουμε

$$ΡΓ = ΑΜ = ΒΓ = ΑΔ$$

και

$$ΡΔ = ΒΜ = ΓΝ$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ΑΔΡ$ και $\triangle ΡΓΝ$ είναι ίσα. Άρα $ΑΡ = ΡΝ$.

(ιι) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων θα έχουμε

$$\angle ΔΡΑ = \angle ΓΝΡ \quad και \quad \angle ΔΑΡ = \angle ΓΡΝ$$

Αφού

$$\angle ΔΡΑ + \angle ΔΑΡ = 90° \text{ ή } \angle ΔΡΑ + \angle ΓΡΝ = 90°$$

Έχουμε ότι $\angle APN = 90°$. Επομένως το τρίγωνο $\varDelta APN$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Άρα θα έχουμε

$$\angle PNA = \angle PAN = 45°$$

Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $AP \parallel \Gamma M$ παίρνουμε $\angle \Gamma KN = \angle PAN = 45°$ (1).

Επίσης το τρίγωνο $\varDelta A\varDelta M$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές έχουμε $\angle A\varDelta M = \angle \varDelta MA = 45°$ (2).

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $\angle \Gamma KN = \angle A\varDelta M = 45°$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, M και $\varDelta$ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

<u>Πρόβλημα 3</u> : Σε ένα τουρνουά καλαθόσφαιρας συμμετέχουν ομάδες μόνο από την Λεμεσό και την Λευκωσία. Οι ομάδες της Λευκωσίας είναι 9 περισσότερες ομάδες από αυτές της Λεμεσού. Κάθε δύο ομάδες συναντήθηκαν για παιχνίδι μεταξύ τους ακριβώς μια φορά. Η νικήτρια ομάδα πήρε 1 πόντο, η χαμένη ομάδα 0 πόντους ενώ δεν υπήρξαν ισοπαλίες. Όλες οι ομάδες από την Λευκωσία μαζί συγκέντρωσαν 9 φορές περισσότερους πόντους από όλες τις ομάδες της Λεμεσού μαζί. Να βρείτε ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός αριθμός των νικών της πιο επιτυχημένης ομάδας από την Λεμεσό.

<u>Προτεινόμενη λύση:</u> Συμβολίζουμε x το πλήθος των ομάδων της Λεμεσού. Επομένως το πλήθος των ομάδων της Λευκωσίας θα είναι $x + 9$.
Οι x ομάδες της Λεμεσού έπαιξαν μεταξύ τους

$$\frac{x(x-1)}{2} \quad \pi\alpha\iota\chi\nu\acute{\iota}\delta\iota\alpha$$

Αν υποθέσουμε ότι οι ομάδες της Λεμεσού συγκέντρωσαν κ πόντους συνολικά παίζοντας με αντίπαλο ομάδα της Λευκωσίας. Τότε το σύνολο των πόντων που συγκέντρωσαν οι ομάδες της Λεμεσού συνολικά θα είναι

$$\frac{x(x-1)}{2} \cdot 1 + \kappa$$

Οι $x + 9$ ομάδες της Λευκωσίας έπαιξαν μεταξύ τους

$$\frac{(x+8)(x+9)}{2} \quad \pi\alpha\iota\chi\nu\acute{\iota}\delta\iota\alpha$$

Τότε το σύνολο των πόντων που συγκέντρωσαν οι ομάδες της Λευκωσίας συνολικά θα είναι

$$\frac{(x+8)(x+9)}{2} \cdot 1 + x(x+9) \cdot 1 - \kappa$$

Επομένως από την υπόθεση θα έχουμε

$$\frac{(x+8)(x+9)}{2} \cdot 1 + x(x+9) \cdot 1 - \kappa = 9\left[\frac{x(x-1)}{2} \cdot 1 + \kappa\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 17x + 72}{2} + x^2 + 9x - \kappa = 9\left(\frac{x^2 - x}{2} + \kappa\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 17x + 72 + 2x^2 + 18x - 2\kappa = 9x^2 - 9x + 18\kappa$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 44x + 20\kappa - 72 = 0 \text{ ή}$$

$$3x^2 - 22x + 10\kappa - 36 = 0$$

Αφού το x είναι θετικός ακέραιος αριθμός θα πρέπει η Διακρίνουσα της τελευταίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Άρα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-22)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (10\kappa - 36) = 916 - 120\kappa = 4(229 - 30\kappa)$$

Θα πρέπει

$$229 - 30\kappa \geq 0 \text{ ή } \kappa \leq \frac{229}{30} \text{ ή } \kappa \leq 7$$

Οι μόνες δυνατές περιπτώσεις για να είναι το Δ τέλειο τετράγωνο θα πρέπει να είναι

$$\kappa = 2 \text{ ή } \kappa = 6.$$

- Αν $\kappa = 2$ τότε έχουμε $x = 8$ και άρα η καλύτερη ομάδα της Λεμεσού συγκέντρωσε
$$7 + 2 = 9 \ \pi\acute{o}\nu\tau o\upsilon\varsigma.$$
- Αν $\kappa = 6$ τότε έχουμε $x = 6$ και άρα η καλύτερη ομάδα της Λεμεσού συγκέντρωσε
$$5 + 6 = 11 \ \pi\acute{o}\nu\tau o\upsilon\varsigma.$$

<u>Πρόβλημα 4</u> : Να βρεθούν 10 διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί οι οποίοι διαιρούν τον αριθμό

$$A = 11111^{60} - 10009^{60}$$

<u>Προτεινόμενη λύση:</u> Ο αριθμός

$$A = 11111^{60} - 10009^{60}$$

είναι προφανώς πολλαπλάσιο του αριθμού

$$11111 - 10009 = 1102 = 2 \cdot 251 = 2 \cdot 19 \cdot 29$$

Άρα οι αριθμοί 2,19,29 είναι διαιρέτες του $11111^{60} - 10009^{60}$.

Επειδή το 3 δεν διαιρεί τον αριθμό 11111 από το μικρό θεώρημα του Fermat θα έχουμε

$$11111^2 \equiv 1 mod 3$$

Άρα

$$11111^{60} \equiv 1 mod 3$$

Ομοίως αφού το 3 δεν διαιρεί τον αριθμό 10009 θα έχουμε

$$10009^{60} \equiv 1 mod 3$$

Άρα

$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv 0 mod 3$$

Δηλαδή το 3 διαιρεί τον αριθμό A.

Ομοίως παίρνουμε

$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^4)^{15} - (10009^4)^{15} \equiv 1 - 1 \equiv 0 mod 5$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^6)^{10} - (10009^6)^{10} \equiv 1 - 1 \equiv 0 mod 7$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^{10})^6 - (10009^{10})^6 \equiv 1 - 1 \equiv 0 mod 11$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^{12})^5 - (10009^{12})^5 \equiv 1 - 1 \equiv 0 mod 13$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv (11111^{30})^2 - (10009^{30})^2 \equiv 1 - 1 \equiv 0 mod 31$$
$$11111^{60} - 10009^{60} \equiv 1 - 1 \equiv 0 mod 61$$

(Αφού κανένας από τους αριθμούς 5,7,11,13,31 δεν διαιρεί τους $11111, 10009$)

Επομένως οι 10 διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί οι οποίοι διαιρούν τον αριθμό

$$A = 11111^{60} - 10009^{60}$$

είναι οι

2,3,5,7,11,13,19,29,31,61