



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΔΗΜΟΤΙΚΟ

Κωδικός: DIM2018-08
Επιμέλεια: Στέλιος Κουζάρης

Πρόβλημα

Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000} < 1$$

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι:

(α) Όλοι οι όροι του αθροίσματος $\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000}$ είναι μικρότεροι από $\frac{1}{1000}$

(β) Όλοι οι όροι του αθροίσματος $\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000}$ (εκτός από το $\frac{1}{2000}$) είναι μεγαλύτεροι από $\frac{1}{2000}$.

(γ) Το πλήθος των όρων στο άθροισμα $\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000}$ είναι $2000 - 1000 = 1000$ προσθετέοι.

Από τις (α) και (γ), προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000} < \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{1000} = 1000 \cdot \frac{1}{1000} = 1 \quad (1)$$

Από τις (β) και (γ), προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} + \cdots + \frac{1}{2000} = 1000 \cdot \frac{1}{2000} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Τέλος, από τις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο, δηλαδή:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000} < 1$$