ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 27/10/2018 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει $x^2+\frac{4}{x^2}=6, x>0$ να βρείτε την αριθμητική τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2$

(β) $x-\frac{2}{x}$

(γ) $x^4+\frac{16}{x^4}$

(δ) $x^3+\frac{8}{x^3}$

Προτεινόμενη Υπόδειξη-Λύση

(α) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=x^2+\frac{4}{x^2}+2\cdot x\cdot\frac{2}{x}=6+4=\mathbf{10}$

(β) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=x^2+\frac{4}{x^2}-4=6-4=2\Longrightarrow\left(x-\frac{2}{x}\right)=\pm\sqrt{\mathbf{2}}$

(γ) $x^4+\frac{16}{x^4}=\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\frac{4}{x^2}=\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)^2-8=6^2-8=\mathbf{28}$

(δ) $x^3+\frac{8}{x^3}=x^3+\left(\frac{2}{x}\right)^3=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=\sqrt{10}\cdot(6-2)=4\sqrt{\mathbf{10}}$

Πρόβλημα 2

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $(x^2+2y^2-2xy)\cdot(x^2+2y^2+2xy)$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A}=2^{10}+5^{12}$ δεν είναι πρώτος.

Προτεινόμενη-Λύση

(α) $(x^2+2y^2-2xy)\cdot(x^2+2y^2+2xy)=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=$
$x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=\boldsymbol{x^4+4y^4}$

(β) Θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό Α.
Έχουμε με συμπλήρωση του τέλειου τετραγώνου:

$$A = 2^{10} + 5^{12} = (2^5)^2 + (5^6)^2 = (2^5 + 5^6)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 5^6 = (2^5 + 5^6)^2 - (2^6 \cdot 5^6)$$
$$= (2^5 + 5^6)^2 - (2^3 \cdot 5^3)^2 = (2^5 + 5^6 - 10^3) \cdot (2^5 + 5^6 + 10^3)$$

Αφού $A = (2^5 + 5^6 - 10^3) \cdot (2^5 + 5^6 + 10^3)$, ο A δεν είναι πρώτος.

2^{ος} τρόπος

Το $A = 2^{10} + 5^{12}$ γράφεται στη μορφή $x^4 + 4y^4$, δηλαδή,
$A = 2^{10} + 5^{12} = \left(5^3\right)^4 + 2^2 \cdot 2^8 = \left(5^3\right)^4 + 4 \cdot \left(2^2\right)^4$ το οποίο και παραγοντοποιείται με βάση το (α) ερώτημα ως: $(x^2 + 2y^2 - 2xy) \cdot (x^2 + 2y^2 + 2xy)$ με $x = 5^3 = 125$ και $y = 4$

Πρόβλημα 3

Δύο Μαθηματικοί, ο Σάββας και ο Δημήτρης, ξεκίνησαν ταυτόχρονα από τα σπίτια τους για να συναντηθούν. Αν και πέρασαν την ίδια χρονική στιγμή από το ίδιο σημείο, ήταν αφηρημένοι και δεν πρόσεξε ο ένας τον άλλο. Από την στιγμή συνάντησης τους και μετά, ο Σάββας χρειάστηκε μόνο 3 λεπτά για να φτάσει στο σπίτι του Δημήτρη, ενώ ο Δημήτρης χρειάστηκε 12 λεπτά για να φτάσει στο σπίτι του Σάββα. Καθόλη τη διάρκεια της διαδρομής τους, ο καθένας είχε την δική του σταθερή ταχύτητα. Να υπολογίσετε για πόσα λεπτά συνολικά,περπάτησε ο καθένας από αυτούς.

Προτεινόμενη -Λύση

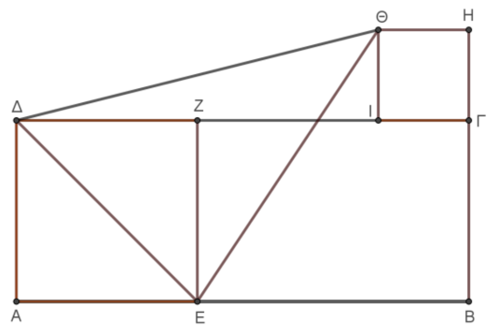
Εστω Α το σπίτι του Δημήτρη, Β το σπίτι του Σάββα και Γ το σημείο συνάτησής τους.Έστω επίσης t ο χρόνος που χρειάστηκαν για να φτάσουν και οι δύο στο σημείο Γ. Τότε έχουμε:

- Για το Δημήτρη να καλύψει την απόσταση: ΑΓ σε t λεπτά και ΒΓσε 12 λεπτά
- Για το Σάββα να καλύψει την απόσταση: ΑΓ σε 3 λεπτά και ΒΓσε t λεπτά

Αν ο Σάββας είναι κ φορές πιο γρήγορος από τον Δημήτρη, τότε:
$$\kappa = \frac{t}{3} = \frac{12}{t} \Longrightarrow t^2 = 36 \Longrightarrow t = 6$$
Άρα ο Σάββας περπατούσε για $6 + 3 =$ **9 λεπτά** και ο Δημήτρης $6 + 12 =$ **18 λεπτά**

Πρόβλημα 4

Στο σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $100\ cm^2$ και τα $ΑΕΖΔ$ και $ΙΓΗΘ$ είναι τετράγωνα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΔΕΘ$ αιτιολογώντα την απάντησή σας.



Προτεινόμενη -Λύση

Τα ΑΕΖΔ και ΙΓΗΘ είναι τετράγωνα και τα σημεία $\Delta, \mathrm{Z}, \mathrm{I}, \Gamma$ συνευθειακά.
Παρατηρούμε ότι $\Delta\mathrm{E} \parallel \Theta\Gamma$και ότι $\mathrm{E}_{\Delta\mathrm{E}\theta} = \mathrm{E}_{\Delta\mathrm{E}\Gamma}$, γιατί έχουν κοινή βάση την ΔΕ και ίσο αντίστοιχο ύψος (ως ίσες αποστάσεις μεταξύ παραλλήλων ευθειών $\Delta\mathrm{E} \parallel \Theta\Gamma$). Έχουμε εύκολα ότι $\mathrm{E}_{\Delta\mathrm{E}\Gamma} = \frac{1}{2}\mathrm{E}_{\Delta\mathrm{AB}\Gamma} == \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$ τ.μ